

2. An application to Galois theory

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

COROLLARY 2 (C. Jordan [3]). *A primitive subgroup of $\text{Sym}(n)$ containing a transposition is all of $\text{Sym}(n)$.*

Proof. Let \mathcal{H} be a primitive subgroup of $\text{Sym}(n)$ and τ a transposition in \mathcal{H} . Then \mathcal{H} permutes the components Γ_i of $\Gamma(\mathcal{H}, \tau)$ and so the vertex sets V_i of the Γ_i are permuted by \mathcal{H} . The primitivity of \mathcal{H} implies that the set $\{1, 2, \dots, n\}$ can be partitioned into disjoint subsets permuted by \mathcal{H} only if each subset has order one or there is just one subset of order n . Since the vertex set of Γ_i has more than one element, there is only one component and $\mathcal{H} = \text{Sym}(n)$ by Corollary 1.

2. AN APPLICATION TO GALOIS THEORY

We extend the theorem mentioned in the introduction replacing the condition that the degree of the polynomial be a prime greater than 3 by the condition that the degree of the polynomial be divisible only by primes greater than 3.

THEOREM 2. *Let $f(x)$ be a polynomial of degree n with rational coefficients and irreducible over the rational field. Assume that $f(x)$ has exactly $n - 2$ real roots. If n is divisible only by primes greater than 3 then the Galois group of the splitting field of $f(x)$ is not solvable and $f(x)$ is not solvable by radicals.*

Proof. Let \mathcal{H} be the Galois group of $f(x)$ over the rational field. We view \mathcal{H} as a permutation group on the n roots of f . Then complex conjugation, τ , is a transposition in \mathcal{H} of the two nonreal roots. Since $f(x)$ is irreducible, \mathcal{H} is transitive on the set of n roots. By theorem 1, \mathcal{H} contains a subgroup isomorphic to the direct product of t copies of $\text{Sym}(k)$ where $tk = n$. Since k is a divisor of n and $k > 1$, the hypothesis on the divisors of n implies $k \geq 5$. Thus $\text{Sym}(k)$ is not a solvable group and \mathcal{H} is not solvable as it contains a nonsolvable subgroup. Thus $f(x)$ is not solvable by radicals.

3. TWO GENERATOR SUBGROUPS OF $\text{Sym}(n)$

Next we apply Theorem 1 to determine the subgroup of $\text{Sym}(n)$ generated by a transposition and one other element. We first consider the case in which