ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 55-70

ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie compact. Une représentation $\alpha: G \to O_{n+1}$ de G induit une action $G \times S^n \to S^n$. Une telle action est dite *linéaire* (ou orthogonale).

Cet article est motivé par la remarque que l'on peut se servir de α pour engendrer d'autres actions sur S^n. Pour cela, considérons un plongement $e: S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que l'image $X = e(S^n)$ est invariante par l'action de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire que $GX = X$. Pour simplifier, nous supposerons également que X englobe O (c'est-à-dire que O est dans la composante relativement compacte du complémentaire de X). La figure 1 ci-dessous donne un

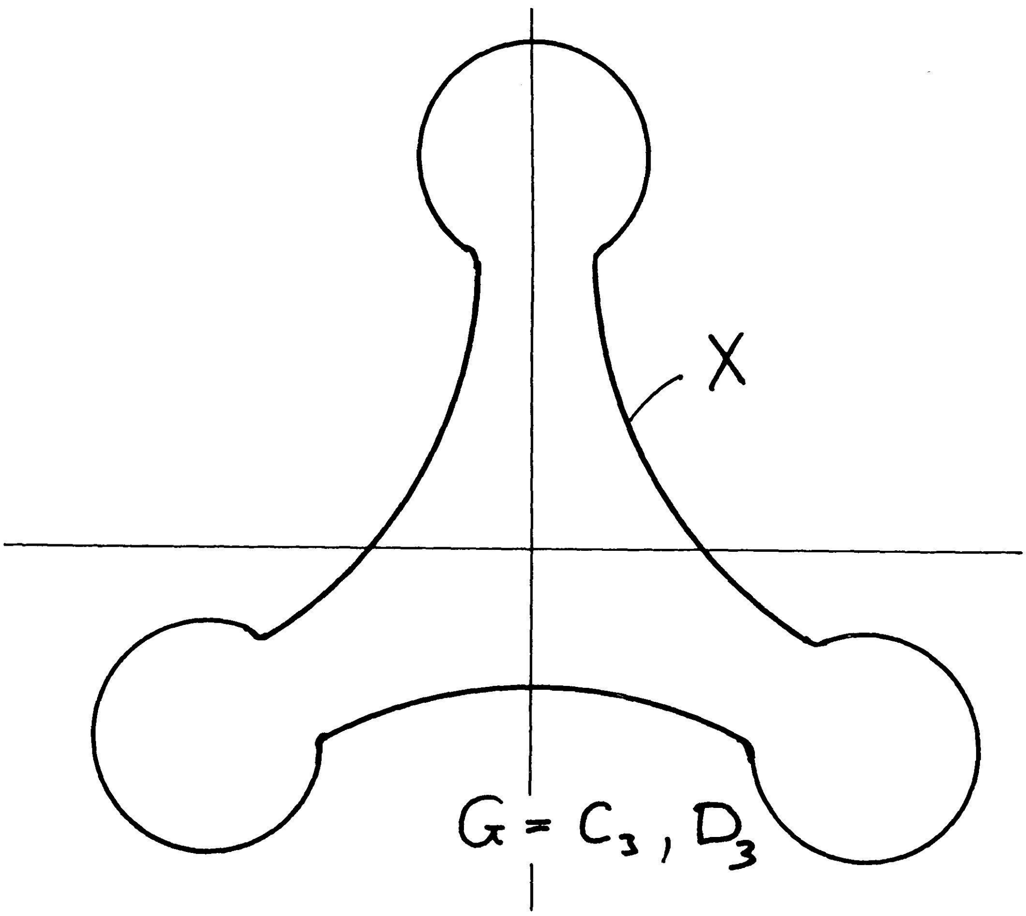

FIGURE 1

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou $(D_3$ (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \to S^n$$
$$(g,x) \mapsto g*x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (QL) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action QL est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

2) Une action QL est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action QL?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G, est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions QL sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. G-COBORDISMES D'ACTIONS

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G-variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α), où V est une variété différentiable (C^∞) et α: $G \times V \to V$ est une action différentiable. Une telle acton définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \to \mathrm{DIFF}(V)$, où $\mathrm{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V. Cet homomorphisme sera également dénoté par α. De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable f: $V_1 \to V_2$ qui est G-équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G-variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G-variété (B, β), où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la

G-action β: $Gx(B, V_1, V_2) \to (B, V_1, V_2)$ étende α_1 et α_2. Un tel cobordisme est dit *G-inversible à droite* s'il existe un G-cobordisme (C, γ) entre (V_2, α_2) et (V_1, α_1) et un G-difféomorphisme

$$h: (B \cup_{V_2} C, V_1, V_1) \to (V_1 \times [0,1], V_1 \times \{0\}, V_1 \times \{1\})$$

valant l'identité sur le bord (où $V_1 \times [0,1]$ est muni de la G-action produit).

Rappelons qu'un cobordisme (W, M, N) est un *h-cobordisme* si les inclusions $M \subset W$ et $N \subset W$ sont des équivalences d'homotopie.

Les résultats relatifs aux actions QL se déduiront du théorème suivant:

(2.1) THÉORÈME. *Une G-action* α: $G \times S^n \to S^n$ *est une action QL, associée à l'action linéaire* α' : $G \to O_{n+1}$, *si et seulement si il existe un G-cobordisme* (B, β) *de* (S^n, α') *vers* (S^n, α) *qui est G-inversible à droite. Dans ce cas,* B *est toujours un h-cobordisme entre deux copies de* S^n.

Remarque. Un G-cobordisme (W, M, N) qui est un h-cobordisme (comme dans le théorème 2.1) n'est en général pas un h-cobordisme de G-variétés, notion qui conduit au théorème du s-cobordisme équivariant. Dans la définition d'un h-cobordisme de G-variétés, on demande que, pour tout sous-groupe H de G, les variétés de points fixes (W^H, M^H, N^H) soient également des h-cobordismes (voir [Ro], Section 3). Les exemples traités ci-dessous ne satisfont pas à cette condition.

Démonstration. Supposons que la G-action α soit QL. Il existe donc un plongement de G-variétés e: $(S^n, \alpha) \hookrightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, \alpha')$ tel que $X = e(S^n)$ englobe O. En le composant au besoin avec une homothétie, on peut supposer que X englobe la sphère de rayon 1 et que X est elle-même englobée par la sphère de rayon $r > 1$. La région B_1 de $\mathbf{R}^{n+1}$ comprise entre S^n et X est un G-cobordisme (entre (S^n, α') et (X, α') qui est G-inversible à droite. En effet, son inverse est la région C_1 comprise entre X et rS^n. Soient $M(e)$ le mapping-cylindre du G-difféomorphisme e: $S^n \to X$ et $M(e^{-1})$ celui de son inverse. Le G-cobordisme (B, β) cherché de (S^n, α') vers (S^n, α) est $B = B_1 \cup M(e^{-1})$ et son inverse à droite est $C = C_1 \cup M(e)$.

Réciproquement, soit (B, β) un G-cobordisme de (S^n, α') vers (S^n, α) et (C, γ) un inverse à droite de (B, β). Il existe donc un G-difféomorphisme E de $A \cup B$ sur la G variété $(\{\times \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 1 \leqslant \| \times \| \leqslant 2\}, \alpha')$ qui est l'identification naturelle sur les bords. La restriction e de E à $A \cap B = S^n$ donne un G-plongement de (S^n, α) dans $(\mathbf{R}^{n+1}, ')$, prouvant que α est une action QL.

Il reste à démontrer que B est un h-cobordisme. Pour cela, on démontre que B est simplement connexe et que les deux inclusions $S^n \subset B$ induisent des isomorphismes sur l'homologie entière. Ceci s'obtient en appliquant le théorème de Seifert-Van-Kampen et la suite de Mayer-Vietoris au diagramme co-cartésien

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ C & S^n \times [0,1] \, . \end{tikzcd}$$

(2.2) *Exemples.* Soit M^n une variété contractile dont le bord $V = \partial M$ n'est pas simplement connexe (V est une sphère d'homologie; c.f. [Ke] pour des exemples).

Soit D un n-disque compact dans int$M$ et soit $A = M - \mathrm{int}D$. Considérons deux copies M_1 et M_2 de M et construisons la variété

$$W^{n+1} = (M_1 \times [0,1]) \quad (M_2 \times [0,1])/\{(x_1,0) = (x_2,0) \,|\, x_1 = x_2 \in A\}$$

formée de deux copies de $Mx[0,1]$ collées le long de A. La variété W, munie de l'involution échangeant (x_1,t) avec (x_2,t) est un h-cobordisme de S^n vers la variété $X = M \cup_V M$ qui est difféomorphe à S^n si $n \geqslant 5$, par le théorème du h-cobordisme. Le même théorème montre que (W, X, S^n) est le C_2-inverse à droite de (W, S^n, X) (car $A \cup_V A = S^{n-1} \times [0,1]$). L'involution sur X est donc QL par le théorème 2.1, associée à la réflexion par rapport à un hyperplan. Mais ces deux involutions ne sont pas topologiquement conjuguées puisque leurs espaces de points fixes (S^{n-1} et V) ne sont pas homéomorphes. (voir fig. 2)

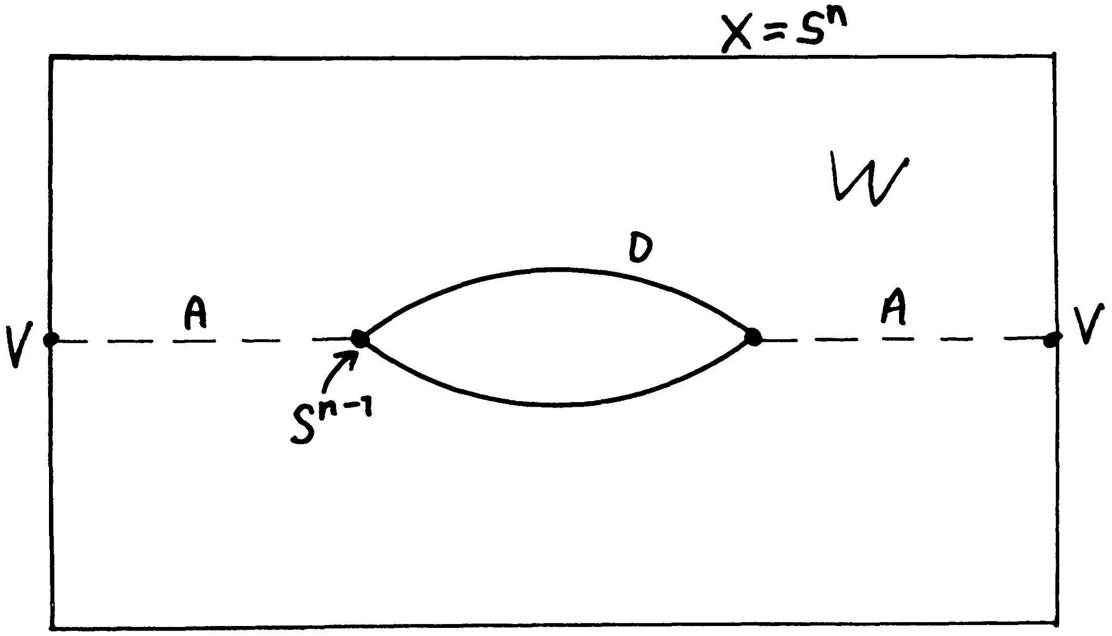

FIGURE 2

3. Actions libres – Résultats généraux

Soit G un groupe de Lie compact. Si $\alpha: G \times S^n \to S^n$ est une action, on dénotera par V_α l'espace des orbites. Rappelons que si α est libre, V_α est une variété différentiable et la projection $S^n \to V_\alpha$ est un G-fibré principal (voir [Br], paragraphes II.1 et II.5). Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

(3.1) Théorème. *Soient* $\alpha, \alpha': G \times S^n \to S^n$ *deux actions libres, où* G *est un groupe de Lie compact. On suppose que* α' *est une action linéaire. Alors:*

a) α *est différentiablement conjuguée à* α' *si et seulement si* V_α *et* $V_{\alpha'}$ *sont difféomorphes.*

b) α *est topologiquement conjuguée à* α' *si et seulement si* V_α *et* $V_{\alpha'}$ *sont homéomorphes.*

c) *Si* $n - \dim G \geqslant 4$, α *est une action QL associée à* α' *si et seulement si* V_α *et* $V_{\alpha'}$ *sont h-cobordantes.*

d) *Si* $n - \dim G \geqslant 4$, α *est une action QL associée à* α' *si et seulement si* $V_\alpha \times \mathbf{R}$ *et* $V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$ *sont difféomorphes.*

La démonstration de (3.1) utilise deux lemmes, probablement bien connus des spécialistes:

(3.2) Lemme. *Soit* α *une action linéaire d'un groupe de Lie* G *sur* S^n. *Supposons qu'il s'agisse d'une action libre. Alors,* G *est ou bien fini ou bien isomorphe à* S^1 *ou* S^3. *De plus:*

a) *Si* $G = S^1$, *alors* $n = 2k + 1$ *et* α *est linéairement conjuguée à l'action diagonale standard de* S^1 *sur l'espace complexe* $\mathbf{C}^{k+1}$.

b) *Si* $G = S^3$, *alors* $n = 4k + 3$ *et* α *est linéairement conjuguée à l'action diagonale standard de* S^3 *sur l'espace quaternionique* $\mathbf{H}^{k+1}$.

Démonstration. Les sous-représentations irréductibles de α donneront aussi une action libre sur leur sphère. On peut donc se restreindre au cas où α est irréductible. Supposons tout d'abord que G est connexe.

Si G est abélien et $\alpha: G \to SO_n$ est irréductible, alors $n = 2$. Comme α doit être injectif pour donner une action libre sur S^1, on aura $G = S^1$ et α est l'identité ou la conjugaison complexe, qui sont linéairement conjuguées dans le groupe O_2.

Dans le cas non-abélien, l'argument ci-dessus s'applique au tore maximal de G qui doit donc être de dimension 1. Cela implique que G est isomorphe à S^3 ou SO_3. La liste des représentations irréductibles de ces deux groupes est connue ([Vi], pp. 78-79 et 113). On vérifie aisément que les représentations irréductibles de SO_3 admettent un vecteur de groupe d'isotripie SO_2 et que, pour celles de S^3, seule la représentation standard sur $\mathbf{H}$ est sans valeur propre 1. Dans le cas général, on peut appliquer ce qui précède à la composante connexe G_1 de l'élément neutre de G. On a donc $G_1 = S^1$ ou S^3. Occupons-nous du premier cas, le cas $G = S^3$, qui se traite similairement, sera laissé au lecteur. On peut donc identifier le quotient $G_1 \backslash S^3$ avec $\mathbf{CP}^k$ de manière que le S^1-fibré principal $S^n \to \mathbf{CP}^k$ est le fibré de Hopf.

Soit $\gamma \in G$ et dénotons par $\bar{\gamma}$ sa classe dans $G_1 \backslash G = \pi_0(G)$. Ce dernier groupe opère librement sur $G_1 \backslash S^n = \mathbf{CP}^k$, ce qui nous permet de considérer la paire $(\gamma, \bar{\gamma})$ comme un morphisme du fibré de Hopf η sur lui-même:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\gamma} & S^n \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \mathbf{CP}^k & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \mathbf{CP}^k \end{array}$$

L'existence de γ au-dessus de $\bar{\gamma}$ n'est possible que si $\bar{\gamma}$ induit l'identité sur $H^2(\mathbf{CP}^k; \mathbf{Z})$ et donc sur toute la cohomologie de $\mathbf{CP}^k$. Son nombre de Lefschetz est donc positif, ce qui, par le théorème du point-fixe de Lefschetz, contredit le fait que γ n'a pas de point fixe.

(3.3) LEMME. *Soit (W^n, M, N) un h-cobordisme de dimension $n \geqslant 5$. Alors W est inversible et $M \times \mathbf{R}$ est difféomorphe à $N \times \mathbf{R}$.*

Démonstration. Si $n > 5$, l'inversibilité de W est classique ([Po], Corollaire 6, p. 18). Dans le cas $n = 5$, on considère $W \times [0,1]$ comme un h-cobordisme entre $M \times [0,1]$ et $P = W \times \{0\} \cup N \times [0,1] \cup W \times \{1\}$. Soit $(Z, M \times [1,2], Q)$ un h-cobordisme tel que sa torsion de Whitehead $\tau(Z, M \times [1,2])$ soit égale à $-\tau(W \times [0,1], M \times [0,1]) = -\tau(W, M)$. L'union de $W \times [0,1]$ avec Z (le long d'un col de $M \times \{1\}$ dans $W \times \{1\}$ et dans Q) donne un s-cobordisme entre $M \times [0,2]$ et $P \cup Q$. Par le théorème du s-cobordisme, $P \cup Q = W \times \{0\} \cup ((P \cup Q) - W \times \{0\})$ est difféomorphe à $M \times [0,2]$. On voit que W est inversible à droite. Un argument similaire montre que W est inversible à gauche.

On a donc, si $n > 4$, un h-cobordisme $(\bar{W}, N, M)$ avec $W \cup \bar{W} = M \times [0,1]$ et $\bar{W} \cup W \cong N \times [0,1]$. Ceci montre que $M \times \mathbf{R}$ est difféomorphe à $N \times \mathbf{R}$ par l'argument classique:

$$\begin{aligned} M \times \mathbf{R} &= \dots \cup (W \cup \bar{W}) \cup (W \cup \bar{W}) \cup \dots \\ &= \dots \cup (\bar{W} \cup W) \cup (\bar{W} \cup W) \cup \dots = N \times \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Preuve du théorème (3.1). Démontrons tout d'abord le point a). Par le lemme 3.2, il suffit de considérer les cas G fini, $G = S^1$ et $G = S^3$.

Démonstration de a) pour G fini. Soit $h: V_\alpha \to V_{\alpha'}$ un difféomorphisme. Les projections $S^n \to V_\alpha$ et $S^n \to V_{\alpha'}$ s'identifient aux revêtements universels de V_α et de $V_{\alpha'}$. Le difféomorphisme h se relève donc en un difféomorphisme $\tilde{h} : S^n \to S^n$ qui est G-équivariant.

Démonstration de a) pour $G = S^1$. Par le lemme 3.2 a), la variété $V_{\alpha'}$ est difféomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^{k-1}$. On a donc un difféomorphisme $h: V_\alpha \to \mathbf{CP}^k$. La composition de la projection $S^n \to V_\alpha$ avec h donne un S^1-fibré principal $\zeta: S^n \to \mathbf{CP}^k$. Rappelons que le fibré de Hopf $\varphi: S^n \to \mathbf{CP}^k$ est universel pour les S^1-fibrés principaux sur des complexes de dimension $2k$. On a donc un morphisme de fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\bar{f}} & S^n \\ \zeta\downarrow & & \downarrow\eta \\ \mathbf{CP}^k & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de f (composée avec l'inclusion de $\mathbf{CP}^k$ dans $\mathbf{CP}^\infty$) représente la 1[re] classe de Chern $c_1(\xi) \in H^2(\mathbf{CP}^k; \mathbf{Z})$. Comparons les suites exactes d'homotopie de ces fibrés:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \pi_2(S^n) & \to & \pi_2(\mathbf{CP}^k) & \to & \pi_1(S^1) & \to & \pi_1(S^n) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \pi_2 f & & \| & & \downarrow \\ 0 = \pi_2(S^n) & \to & \pi_2(\mathbf{CP}^k) & \to & \pi_1(S^1) & \to & \pi_1(S^n) = 0 \end{array}$$

Comme $\pi_2(\mathbf{CP}^k) = H_2(\mathbf{CP}^k)$, on a que $\pi_2 f$ est la multiplication par $c_1(E')$. Vu que $\pi_1(S^n) = 0$, il en résulte que $c_1(E') = \pm 1$. On peut donc choisir le morphisme de fibré ci-dessus de manière que f soit un difféomorphisme (l'identitité ou la conjugaison complexe). L'application $\tilde{f} : S^n \to S^n$ sera alors un difféomorphisme S^1-équivariant.

Démonstration de a) pour $G = S^3$. On procède exactement comme dans le cas de S^1. Le rôle de $\mathbf{CP}^k$ est remplacé par l'espace projectif quaternionien $\mathbf{HP}^k$. Tout S^3-fibré sur un complexe de dimension $4k$ est induit du fibré de Hopf $S^n \to \mathbf{HP}^k$. On a donc un morphisme de S^3-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{HP}^k & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbf{HP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de f représente la seconde classe de Chern $c_2(\xi) \in H^4(\mathbf{HP}^k;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Comme $\pi_3(S^n) = 0$, on déduit, comme dans le cas précédent que $c_2(E') = \pm 1$ et donc f est homotope à un difféomorphisme (donc $\tilde{f}$ à un difféomorphisme équivariant).

Démonstration de b. Elle est en tout point semblable à celle de a).

Démonstrations de c) et d). Supposons que α est *QL* associée à l'action linéaire α'. Soit (B,β) un G-cobordisme G-inversible à droite, entre (S^n,α') et (S^n,α) comme construit dans la démonstration du théorème (2.1). On vérifie sur la construction que l'action de G sur B est libre. Comme B est un h-cobordisme, le quotient $W = G\backslash B$ est donc un h-cobordisme entre $V_{\alpha'}$ et V_α. Par le lemme (3.3), on a un difféomorphisme de $H\,V_\alpha \times\,]0, \infty[$ $\to V_{\alpha'} \times\,]0, \infty[$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de construire un difféomorphisme G-équivariant $h: (S^n \times\,]0, \infty[,\alpha) \to (S^n \times\,]0, \infty[\alpha')$ (actions produit). En effet, comme $(S^n \times\,]0, \infty[\alpha')$ est G-difféomorphe à $(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\},\alpha')$ (puisque α' est linéaire), $h|S^n \times \{0\}$ sera alors un plongement S^1-équivariant de (S^n,α) dans (R^{n+1},α'), ce qui montre que α est *QL* associée à α'.

Le difféomorphisme h se construit de la même manière que dans le cas a) (remplaçant V_α par $V_\alpha \times \mathbf{R}$, etc. les détails sont laissés au lecteur. Enfin, si $h: V_\alpha \times \mathbf{R} \to V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$ est un difféomorphisme, le cobordisme entre $h(V_\alpha \times \{0\})$ et $V_{\alpha'} \times \{t\}$, pour t assez grand, est clairement un h-cobordisme.

4. Actions libres d'un groupe cyclique fini

Soit C_q le groupe cyclique d'ordre q. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

(4.1) THÉORÈME. *Si $q = 2, 3, 4$ ou 6, toute action QL libre de C_q sur* S^n *$(n \geqslant 5)$ est différentiablement conjuguée à son action linéaire associée.*

(4.2) THÉORÈME. *Soit* α *une action linéaire libre de* C_q *sur* S^n. *Supposons que* $q \neq 2, 3, 4$ *ou* 6 *et* $n \geqslant 5$. *Alors il existe une infinité dénombrable d'actions QL de* C_q *sur* S^n *associées à* α, *qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action linéaire.*

Démonstration de (4.1). Soit α une action linéaire libre de C_q sur S^n et α' une action QL associée à α. Par le théorème (3.1) cas c), les variétés quotient V_α et $V_{\alpha'}$ sont h-cobordantes. Si $q = 2, 3, 4$ ou 6, le groupe de Whitehead $Wh(C_q)$ est nul [Co], (11.5). Comme $\pi_1(V_\alpha) = C_q$ et $n \geqslant 5$, le théorème du s-cobordisme [Ke], p. 32 assure que V_α et $V_{\alpha'}$ sont difféomorphes. Les actions α et α' sont donc différentiablement conjuguées par le cas a) du théorème (3.1).

Démonstration de (4.2). Si $q \neq 2, 3, 4$ ou 6, le groupe de Whitehead $Wh(C_q)$ est infini dénombrable ([Co], (11.5)). Pour chaque $\gamma \in Wh(C_q)$, il existe un h-cobordisme $(W_\gamma, V_\alpha, V_{\alpha(\gamma)})$ dont la torsion de Whitehead $\tau(W_\gamma, V_\alpha) = \gamma \in Wh(V_\alpha)$ ([Ke], p. 32). Le revêtement universel $\tilde{W}_\gamma$ de W_γ est un h-cobordisme entre S^n et $V_{\alpha(\gamma)}$. Par le théorème du h-cobordisme, on en déduit que $V_{\alpha(\gamma)}$ est difféomorphe à S^n, ce qui donne une action QL $\alpha(\gamma)$ sur S^n associée à α (par le cas c) du théorème (3.1)).

Nous affirmons que les classes de conjugaison topologique de ces $(S^n, \alpha(\gamma))$ contiennent au plus un nombre fini d'éléments. En effet, dans le cas contraire, on aurait, pour une collection infinie de $\gamma \in Wh(C_q)$, un homéomorphisme h_γ de $V_\alpha(\gamma)$ sur une variété fixe A. Soit $g_\gamma\colon V_\alpha \to V_{\alpha(\gamma)}$ la composition de l'inclusion $V_\alpha \subset W_\gamma$ avec la rétraction de W_γ sur $V_{\alpha(\gamma)}$, et soit $f_\gamma\colon V_\alpha \to A$ l'équivalence d'homotopie $f_\gamma = h_\gamma \circ g_\gamma$. Comme $\tau(h_\gamma) = 0$ [Co], p. 102, on a

$$\tau(f_\gamma) = h_{\gamma *}(\tau(g_\gamma)) = h_{\gamma *}(\gamma + (-1)^{n+1}\bar{\gamma})$$

(voir [Mi], p. 401). Dans $Wh(C_q)$ on a $\gamma = \bar{\gamma}$ par [Mi], Lemma 6.7 et [Co], 11.5. D'où $\tau(f_\gamma) = h_{\gamma *}(2\gamma)$. On en déduit que pour une infinité de γ, les applications f_γ sont deux-à-deux non-homotopes. Ceci contredit le fait, facilement visible par la théorie des obstructions, que l'ensemble des classes d'homotopie d'équivalences d'homotopie de V_α dans A est fini.

On peut donc extraire un ensemble dénombrable Ω de $(S_n, \alpha(\gamma))$ qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées. Les classes de conjugaison de représentations linéaires de C^q dans $\mathbf{R}^{n+1}$ étant en nombre fini, seul un sous-ensemble fini de Ω peut donc être constitué d'actions topologiquement conjuguées à une action linéaire.

(4.3) *Remarques.*

a) Les actions du théorème (4.2) sont essentiellement celles construites par Milnor [Mi2]. A l'époque, on ne disposait pas de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead, ce qui empêchait Milnor de déduire qu'elles n'étaient pas topologiquement conjuguées à une action linéaire.

b) La démonstration de (4.2) se généralise au cas d'actions libres d'un groupe fini G sur S^n, pourvu que $Wh(G)$ contienne une infinité d'éléments τ tels que $\tau = \bar{\tau}$. C'est, par exemple le cas du groupe du dodécaèdre à 120 éléments (voir [Ha], chapitre 5) qui agit librement sur S^{4k-1}.

c) Il est connu que le groupe de chirurgie $L_2(C_q)$ est infini si $q > 2$ [Ba]. On déduit alors de la suite exacte de la chirurgie (et de la théorie du lissage) pour un espace lenticulaire V^6 avec groupe fondamental C_q qu'il existe une infinité dénombrable de variétés W^6 homotopiquement équivalente à V qui sont deux-à-deux non-topologiquement h-cobordantes. Leurs revêtements universels sont des sphères d'homotopie de dimension 6 donc difféomorphes à S^6. Cet argument montre que pour $q > 2$, il existe une infinité d'actions libres de C_q sur S^6 qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action QL.

5. Actions libres de S^1

Nous commencerons par les actions libres de S^1 sur S^3.

(5.1) Proposition. *Toute action libre de S^1 sur S^3 est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Une action libre de S^1 sur S^3 donne un fibré principal $p: S^3 \to S^1 \backslash S^3 = V$ (voir le paragraphe 3). On en déduit que V est une surface qui, par suite exacte du fibré p est simplement connexe. Il s'en suit que V est difféomorphe à S^2. Le fibré p est induit du fibré de Hopf par une application $f: V \to S^2$. Comme dans la démonstration du cas a) du théorème (3.1), on déduit que le degré de f est ± 1 et donc f est homotope à un difféomorphisme. Ce difféomorphisme se relève, au niveau des espaces totaux, en un difféomorphisme S^1-équivariant qui conjugue notre action de départ avec l'action standard.

(5.2) Théorème. *Toute action libre QL de S^1 sur S^n, avec $n \geqslant 7$, est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Soit (S^n, α) une telle action. Par le lemme (3.2), on sait que l'action linéaire associée α' est standard. Par le théorème (3.1), il existe un h-cobordisme $(W^n, V_{\alpha'}, V_\alpha)$. Comme W est simplement connexe et $n \geqslant 7$, le théorème du h-cobordisme implique que W est difféomorphe à $V_{\alpha'} \times [0,1]$. On en déduit, par le cas a) du théorème (3.1) que α et α' sont différentiablement conjuguées.

(5.3) *Remarque.* Il existe, en général, une infinité dénombrable d'actions libre de S^1 sur S^n qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées (voir [Hs] pour un exemple dans le cas $n = 11$). Ces actions ne sont donc pas topologiquement conjuguées à une action QL.

La situation pour les actions libres de S^1 sur S^n, pour $n \geqslant 7$ peut donc se schématiser de la façon suivante:

$$\text{actions linéaires} =_{\text{diff}} \text{actions } QL \neq_{\text{TOP}} \text{actions générales.}$$

En revanche, pour les actions libres de S^1 sur S^5, on va voir que l'on a:

$$\text{actions linéaires} =_{\text{TOP}} \text{actions } QL =_{\text{DIFF}} \text{actions générales}$$

et que l'égalité actions linéaires $=_{diff}$ actions QL constitue un problème ouvert. De manière précise:

(5.4) THÉORÈME. *a) Toute action libre de S^1 sur S^5 est différentiablement conjuguée à une action QL et topologiquement conjuguée à l'action standard.*

b) L'ensemble des classes de conjugaison différentiable d'actions QL libres de S^1 sur S^5 se surjecte sur l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur $\mathbf{CP}^2$. *Les préimages de cette surjection ont au plus 2 éléments.*

Remarque. La détermination de l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur $\mathbf{CP}^2$ constitue un problème ouvert. On ne sait même pas si cet ensemble est fini (le même ensemble, pour certaines sommes connexes de $\pm\mathbf{CP}^2$, est infini [FM]). Dans l'état actuel des connaissances il est bien sûr possible que cet ensemble soit réduit à un seul élément, auquel cas toute action libre serait différentiablement conjuguée à l'action standard (voir le corollaire (5.5) ci-dessous).

Démonstration. Soit (S^5, α) une action différentiable libre de S^1 sur S^5. Le quotient $V_\alpha = S^1 \backslash S^5$ est une variété de dimension 4 et la projection $p\colon S^5 \to V_\alpha$ est un S^1-fibré principal, induit du fibré de Hopf η. On a donc un morphisme de S^1-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \rightarrow & S^5 \\ \downarrow p & & \downarrow \eta \\ V_\alpha & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^2 \end{array}$$

Avec la suite exacte d'homotopie, on vérifie que f est une équivalence d'homotopie. Un théorème de C.T.C. Wall [Ki], Theorem 1 p. 59 implique que V_α et $\mathbf{CP}^2$ sont h-cobordante ce qui, par le théorème (3.1), entraîne que α est différentiablement conjuguée à une action QL (l'action linéaire associée étant standard). De plus, le théorème du h-cobordisme topologique de M. Freedmann [Fr], théorème 1.3 implique que V_α est homéomorphe à $\mathbf{CP}^2$. L'action α est donc topologiquement conjuguée à l'action standard (Théorème (3.1), cas b). Ceci démontre le point a) et permet de définir l'application du point b): à une action QL libre α on associe sa variété quotient V_α.

Soit V une variété différentiable homéomorphe à $\mathbf{CP}^2$. Par le théorème de Wall cité ci-dessus, il existe un h-cobordisme $(W, \mathbf{CP}^2, V)$. Le fibré de Hopf sur $\mathbf{CP}^2$ s'étend en un S^1-fibré principal sur W qui, par restriction à V donne un S^1-fibré principal $E \rightarrow V$. Par le théorème du h-cobordisme, E est difféomorphe à S^5. On obtient ainsi une action α libre de S^1 sur S^5 qui est QL par le théorème (3.1), avec $V_\alpha = V$. Cela démontre que notre correspondance est surjective. D'autre part, soient α et α' sont deux actions libres dont les quotients sont difféomorphes à V. Les projections de S^5 sur V_α et $V_{\alpha'}$ sont donc équivalentes à deux S^1-fibrés principaux sur V. Comme dans la démonstration du théorème 3.1, on vérifie que les premières classes de Chern de ces fibrés sont des générateurs de $H^2(V;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Cela montre que V a au plus deux préimages qui seront confondues si et seulement si V possède un difféomorphisme sur lui-même induisant la multiplication par -1 sur $H^2(V;\mathbf{Z})$. Cela achève la preuve du point b) et démontre le corollaire suivant:

(5.5) COROLLAIRE. *Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1) *Toute action libre de* S^1 *sur* S^5 *est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

2) *Toute variété différentiable homéomorphe à* $\mathbf{CP}^2$ *est difféomorphe à* $\mathbf{CP}^2$.

6. ACTIONS LIBRES DE S^3

Les résultats pour S^3 sont similaires à ceux pour S^1 (à part la proposition 5.1 qui ne se retrouve que partiellement dans 6.4.a). Les démonstrations sont identiques, le rôle de $\mathbf{CP}^2$ étant tenu par $\mathbf{HP}^1 = S^4$ (et la 1re classe de Chern étant remplacée par la seconde). Les détails sont donc laissés au lecteur.

(6.2) THÉORÈME. *Toute action libre QL de* S^3 *sur* S^n, *avec* $n \geqslant 11$, *est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

(6.3) *Remarque.* Il existe, en général, une infinité dénombrable d'actions libre de S^3 sur S^n $(n \geqslant 11)$ qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées (voir [Hs] pour un exemple dans le cas $n = 11$). Ces actions ne sont donc pas topologiquement conjuguées à une action *QL*.

Comme dans le paragraphe précédent, la situation des actions de S^3 sur S^7 est très différente:

(6.4) THÉORÈME. a) *Toute action libre de* S^3 *sur* S^7 *est différentiablement conjuguée à une action QL et topologiquement conjuguée à l'action standard.*

b) *L'ensemble des classes de conjugaison différentiable d'actions QL libres de* S^3 *sur* S^7 *se surjecte sur l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur* S^4. *Les préimages de cette surjection ont au plus 2 éléments.*

Remarque. La détermination de l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur S^4 constitue un problème ouvert et on ne sait même pas s'il est fini. L'hypothèse que cet ensemble est réduit à un seul élément est connue sous le nom de «conjecture de Poincaré différentiable».

Comme dans la preuve de 5.5, on montre que la préimage d'une variété V homéomorphe à S^4 par la surjection de 6.5.b est unique si et seulement si V possède un difféomorphisme sur elle-même renversant l'orientation (rappelons que ce n'est en général pas le cas pour des sphères d'homotopie de dimension supérieure ou pour certaines structures différentiables exotiques sur $\mathbf{R}^4$). Cependant, comme c'est le cas pour $V = S^4$, on a:

(6.5) COROLLAIRE. *Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1) *Toute action libre de* S^3 *sur* S^7 *est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

2) *Toute variété différentiable homéomorphe à* S^4 *est difféomorphe à* S^4 *(conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4).*

7. Exemples d'actions quasi linéaires

Dans ce paragraphe, nous considérerons la «donnée» suivante:

— M^{n+1} est une variété riemanienne,

— G est un groupe de Lie compact opérant sur M par isométries,

— $f: M \to \mathbf{R}$ est une application différentiable telle que $f(gx) = f(x)$ pour tout $x \in M$ et $g \in G$.

— L'application f a un unique point critique $p \in M$, qui est un extremum. Le point p est donc un point fixe pour l'action de G. On choisit une isométrie h entre l'espace tangent T_pM et $\mathbf{R}^{n+1}$ avec son produit scalaire standard. L'action induite de G sur T_pM est donc transportée par h en une action orthogonale de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$ que nous noterons α,

— Soit $q \in \mathbf{R}$ une valeur régulière de f. On suppose que la variété $f^{-1}(\{q\})$ est difféomorphe à S^n. Remarquons que $f^{-1}(\{q\})$ est une G-variété.

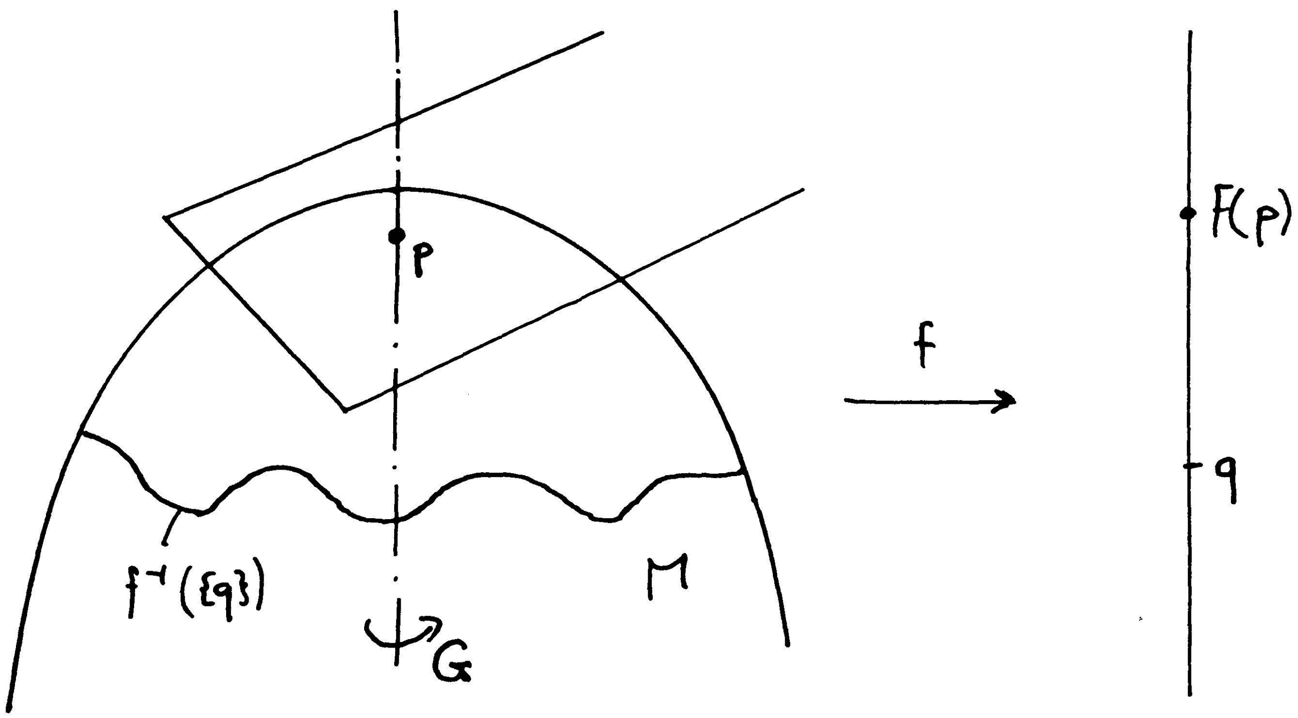

FIGURE 3

Pour une telle donnée, nous allons démontrer les trois propositions suivantes:

(7.1) PROPOSITION. *L'action de G sur $f^{-1}(\{q\})$ est QL associée à α.*

(7.2) PROPOSITION. *Supposons que p est un extremum non dégénéré. Alors l'action de G sur $f^{-1}(\{q\})$ est différentiablement conjuguée à α.*

(7.3) PROPOSITION *Soit α' une action QL libre de G sur S^n associée à l'action linéaire α. Alors il existe une donnée comme ci-dessus pour laquelle l'action de G sur $f^{-1}(\{q\})$ est différentiablement conjuguée à α'.*

Preuves. Soit U un voisinage de O dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = \exp \circ h: U \to M$ fournisse une carte au voisinage de p. On supposera que p est un minimum et que $f(p) = 0$. Comme p est l'unique point critique de f, il existe q' tel que $0 < q' < q, f^{-1}(\{q'\}) \subset \varphi(U)$ et $f^{-1}(\{q\})$ admet un difféomorphisme G-équivariant sur $f^{-1}(\{q'\})$ (on utilise le flot du champ $\operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|$ (voir [Mi3], Theorem 3.4). Comme $\varphi^{-1} \mid f^{-1}(\{q\})$ est un plongement G-équivariant de $f^{-1}(\{q\})$ dans $(\mathbf{R}^{n+1}, \alpha)$ cela prouve la proposition (7.1).

Si maintenant p est un minimum non-dégénéré, le lemme de Morse fournit une carte ψ telle que $f \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Dans ce système de coordonnées, les variétés de niveau de f sont des sphères standards qui intersectent donc chaque rayon de $\mathbf{R}^{n+1}$ transversalement. On en déduit que $(f \circ \varphi)^{-1}(\{q'\})$ intersecte chaque rayon de $\mathbf{R}^{n+1}$ transversalement, si q' est suffisamment petit. On a alors un difféomorphisme équivariant de $(f \cdot \varphi)^{-1}(\{q'\})$ sur la sphère de rayon 1 par la projection radiale. Cela démontre (7.2). Pour démontrer (7.3), on va construire la fonction f pour $M = \mathbf{R}^{n+1}$ muni de l'action α. Si α' une action libre QL associée à α, on a, par le point d) du théorème (3.1), un difféomorphisme G-équivariant $g: (S^n \times \mathbf{R}, \alpha) \to (S^n \times \mathbf{R}, \alpha')$ (actions produits). Posons $g(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$. Soit

$$w(x, t) = e^{g_2(x, \log t)} .$$

On a donc un difféomorphisme G-équivariant de

$$(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha) = (S^n \times]0, \infty[, \alpha)$$

sur $(S^n \times]0, \infty[, \alpha')$ pour les actions produits donné par

$$(x, t) \mapsto (g_1(x, t), w(x, t)) .$$

On définit $f: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ par:

$$f(x, t) = e^{-1/w(x,t)^2} \quad \text{et} \quad f(0) = 0 .$$

Comme le difféomorphisme g est en quelque sorte «périodique» (voir sa construction dans la preuve de (3.1)), on a que toutes les dérivées partielles, de tout ordre, de g sont bornées et de plus $t - 2 \leqslant g_2(x, t) \leqslant t + 2$. On en déduit que toutes les dérivées partielles de $w(x, t)$ sont bornées. Il s'en suit que f est de classe C^∞ avec toutes les dérivées partielles s'annulant en 0. On vérifie aisément que f a les propriétés voulues, ce qui démontre (7.3).

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAK, A. The computation of surgery groups of finite groups with abelian 2-hyperelementary subgroups. *Proc. Evanston K-theory conf. (1976).* Springer Lect. Notes 551, 384-409.

[Br] BREDON, G. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press 1972.

[Co] COHEN, M. *A course in simple-homotopy theory.* Springer-Verlag 1973.

[Fr] FREEDMANN, M. The topology of 4-dimensional manifolds. *Journal of Differential geometry 17* (1982), 357-453.

[F-M] FRIEDMANN, R. and J. MORGAN. On the diffeomorphism type of certain surfaces I. *Journal of Differential geometry 27* (1988), 297-369.

[Ha] HAUSMANN, J.-Cl. *Groupes de sphères d'homologie entières.* Thèse, Université de Genève, 1974.

[Ha2] —— Sur la topologie des bras articulés. *Algebraic topology,* Poznan. Springer Lecture Notes 1474 (1989), 146-159.

[Hs] HSIANG, W. C. and W. Y. HSIANG. Some free actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres. *Quarterly J. of Math. 15* (1964), 371-374.

[Ke] KERVAIRE, M. Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. AMS 144* (1969), 67-72.

[Ke2] —— Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Comm. Math. Helv. 40* (1965), 31-42.

[Ki] KIRBY, R. *The topology of 4-manifolds.* Springer Lect. Notes 1374 (1989).

[Mi] MILNOR, J. Whitehead torsion. *Bull. American Math. Soc. 72* (1966), 358-426.

[Mi2] —— Some free action of cyclic groups on spheres. *Differentiable Analysis,* Proc. conf. Bombay (1964), Oxford Univ. Press.

[Mi3] —— *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton Univ. Press 1965.

[Po] POENARU, V. Le théorème du *s*-cobordisme. *Séminaire Bourbaki* (Fév. 1971) exposé n° 392.

[Ro] ROTHENBERG, M. Torsion invariants and finite transformation groups. *Proc. of Symp. in pure Math.,* AMS, Stanford 1976, 267-312.

[Vi] VINBERG, E. *Linear representations of groups.* Birkhäuser 1989.

(Reçu le 13 mai 1991)

Jean-Claude Hausmann

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH-1211 Genève 24 (Suisse)