

### 3. Actions libres – Résultats généraux

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3. ACTIONS LIBRES – RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Soit  $G$  un groupe de Lie compact. Si  $\alpha: G \times S^n \rightarrow S^n$  est une action, on dénotera par  $V_\alpha$  l'espace des orbites. Rappelons que si  $\alpha$  est libre,  $V_\alpha$  est une variété différentiable et la projection  $S^n \rightarrow V_\alpha$  est un  $G$ -fibré principal (voir [Br], paragraphes II.1 et II.5). Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

(3.1) THÉORÈME. Soient  $\alpha, \alpha': G \times S^n \rightarrow S^n$  deux actions libres, où  $G$  est un groupe de Lie compact. On suppose que  $\alpha'$  est une action linéaire. Alors:

a)  $\alpha$  est différentiablement conjuguée à  $\alpha'$  si et seulement si  $V_\alpha$  et  $V_{\alpha'}$ , sont difféomorphes.

b)  $\alpha$  est topologiquement conjuguée à  $\alpha'$  si et seulement si  $V_\alpha$  et  $V_{\alpha'}$  sont homéomorphes.

c) Si  $n - \dim G \geq 4$ ,  $\alpha$  est une action QL associée à  $\alpha'$  si et seulement si  $V_\alpha$  et  $V_{\alpha'}$  sont  $h$ -cobordantes.

d) Si  $n - \dim G \geq 4$ ,  $\alpha$  est une action QL associée à  $\alpha'$  si et seulement si  $V_\alpha \times \mathbf{R}$  et  $V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$  sont difféomorphes.

La démonstration de (3.1) utilise deux lemmes, probablement bien connus des spécialistes:

(3.2) LEMME. Soit  $\alpha$  une action linéaire d'un groupe de Lie  $G$  sur  $S^n$ . Supposons qu'il s'agisse d'une action libre. Alors,  $G$  est ou bien fini ou bien isomorphe à  $S^1$  ou  $S^3$ . De plus:

a) Si  $G = S^1$ , alors  $n = 2k + 1$  et  $\alpha$  est linéairement conjuguée à l'action diagonale standard de  $S^1$  sur l'espace complexe  $\mathbf{C}^{k+1}$ .

b) Si  $G = S^3$ , alors  $n = 4k + 3$  et  $\alpha$  est linéairement conjuguée à l'action diagonale standard de  $S^3$  sur l'espace quaternionique  $\mathbf{H}^{k+1}$ .

*Démonstration.* Les sous-représentations irréductibles de  $\alpha$  donneront aussi une action libre sur leur sphère. On peut donc se restreindre au cas où  $\alpha$  est irréductible. Supposons tout d'abord que  $G$  est connexe.

Si  $G$  est abélien et  $\alpha: G \rightarrow SO_n$  est irréductible, alors  $n = 2$ . Comme  $\alpha$  doit être injectif pour donner une action libre sur  $S^1$ , on aura  $G = S^1$  et  $\alpha$  est l'identité ou la conjugaison complexe, qui sont linéairement conjuguées dans le groupe  $O_2$ .

Dans le cas non-abélien, l'argument ci-dessus s'applique au tore maximal de  $G$  qui doit donc être de dimension 1. Cela implique que  $G$  est isomorphe à  $S^3$  ou  $SO_3$ . La liste des représentations irréductibles de ces deux groupes est connue ([Vi], pp. 78-79 et 113). On vérifie aisément que les représentations irréductibles de  $SO_3$  admettent un vecteur de groupe d'isotropie  $SO_2$  et que, pour celles de  $S^3$ , seule la représentation standard sur  $\mathbf{H}$  est sans valeur propre 1. Dans le cas général, on peut appliquer ce qui précède à la composante connexe  $G_1$  de l'élément neutre de  $G$ . On a donc  $G_1 = S^1$  ou  $S^3$ . Occupons-nous du premier cas, le cas  $G = S^3$ , qui se traite similairement, sera laissé au lecteur. On peut donc identifier le quotient  $G_1 \backslash S^3$  avec  $\mathbf{CP}^k$  de manière que le  $S^1$ -fibré principal  $S^n \rightarrow \mathbf{CP}^k$  est le fibré de Hopf.

Soit  $\gamma \in G$  et dénotons par  $\bar{\gamma}$  sa classe dans  $G_1 \backslash G = \pi_0(G)$ . Ce dernier groupe opère librement sur  $G_1 \backslash S^n = \mathbf{CP}^k$ , ce qui nous permet de considérer la paire  $(\gamma, \bar{\gamma})$  comme un morphisme du fibré de Hopf  $\eta$  sur lui-même:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\gamma} & S^n \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \mathbf{CP}^k & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \mathbf{CP}^k \end{array}$$

L'existence de  $\gamma$  au-dessus de  $\bar{\gamma}$  n'est possible que si  $\bar{\gamma}$  induit l'identité sur  $H^2(\mathbf{CP}^k; \mathbf{Z})$  et donc sur toute la cohomologie de  $\mathbf{CP}^k$ . Son nombre de Lefschetz est donc positif, ce qui, par le théorème du point-fixe de Lefschetz, contredit le fait que  $\gamma$  n'a pas de point fixe.

(3.3) LEMME. *Soit  $(W^n, M, N)$  un  $h$ -cobordisme de dimension  $n \geq 5$ . Alors  $W$  est inversible et  $M \times \mathbf{R}$  est difféomorphe à  $N \times \mathbf{R}$ .*

*Démonstration.* Si  $n > 5$ , l'inversibilité de  $W$  est classique ([Po], Corollaire 6, p. 18). Dans le cas  $n = 5$ , on considère  $W \times [0, 1]$  comme un  $h$ -cobordisme entre  $M \times [0, 1]$  et  $P = W \times \{0\} \cup N \times [0, 1] \cup W \times \{1\}$ . Soit  $(Z, M \times [1, 2], Q)$  un  $h$ -cobordisme tel que sa torsion de Whitehead  $\tau(Z, M \times [1, 2])$  soit égale à  $-\tau(W \times [0, 1], M \times [0, 1]) = -\tau(W, M)$ . L'union de  $W \times [0, 1]$  avec  $Z$  (le long d'un col de  $M \times \{1\}$  dans  $W \times \{1\}$  et dans  $Q$ ) donne un  $s$ -cobordisme entre  $M \times [0, 2]$  et  $P \cup Q$ . Par le théorème du  $s$ -cobordisme,  $P \cup Q = W \times \{0\} \cup ((P \cup Q) - W \times \{0\})$  est difféomorphe à  $M \times [0, 2]$ . On voit que  $W$  est inversible à droite. Un argument similaire montre que  $W$  est inversible à gauche.

On a donc, si  $n > 4$ , un  $h$ -cobordisme  $(\bar{W}, N, M)$  avec  $W \cup \bar{W} = M \times [0, 1]$  et  $\bar{W} \cup W \cong N \times [0, 1]$ . Ceci montre que  $M \times \mathbf{R}$  est difféomorphe à  $N \times \mathbf{R}$  par l'argument classique:

$$\begin{aligned} M \times \mathbf{R} &= \dots \cup (W \cup \bar{W}) \cup (W \cup \bar{W}) \cup \dots \\ &= \dots \cup (\bar{W} \cup W) \cup (\bar{W} \cup W) \cup \dots = N \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

*Preuve du théorème (3.1).* Démontrons tout d'abord le point a). Par le lemme 3.2, il suffit de considérer les cas  $G$  fini,  $G = S^1$  et  $G = S^3$ .

*Démonstration de a) pour  $G$  fini.* Soit  $h: V_\alpha \rightarrow V_{\alpha'}$  un difféomorphisme. Les projections  $S^n \rightarrow V_\alpha$  et  $S^n \rightarrow V_{\alpha'}$  s'identifient aux revêtements universels de  $V_\alpha$  et de  $V_{\alpha'}$ . Le difféomorphisme  $h$  se relève donc en un difféomorphisme  $\tilde{h}: S^n \rightarrow S^n$  qui est  $G$ -équivariant.

*Démonstration de a) pour  $G = S^1$ .* Par le lemme 3.2 a), la variété  $V_{\alpha'}$  est difféomorphe à l'espace projectif complexe  $\mathbf{CP}^{k-1}$ . On a donc un difféomorphisme  $h: V_\alpha \rightarrow \mathbf{CP}^k$ . La composition de la projection  $S^n \rightarrow V_\alpha$  avec  $h$  donne un  $S^1$ -fibré principal  $\zeta: S^n \rightarrow \mathbf{CP}^k$ . Rappelons que le fibré de Hopf  $\varphi: S^n \rightarrow \mathbf{CP}^k$  est universel pour les  $S^1$ -fibrés principaux sur des complexes de dimension  $2k$ . On a donc un morphisme de fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{CP}^k & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de  $f$  (composée avec l'inclusion de  $\mathbf{CP}^k$  dans  $\mathbf{CP}^\infty$ ) représente la 1<sup>re</sup> classe de Chern  $c_1(\xi) \in H^2(\mathbf{CP}^k; \mathbf{Z})$ . Comparons les suites exactes d'homotopie de ces fibrés:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \pi_2(S^n) & \rightarrow & \pi_2(\mathbf{CP}^k) & \rightarrow & \pi_1(S^1) & \rightarrow & \pi_1(S^n) = 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi_2 f & & \parallel & & \downarrow \\ 0 = \pi_2(S^n) & \rightarrow & \pi_2(\mathbf{CP}^k) & \rightarrow & \pi_1(S^1) & \rightarrow & \pi_1(S^n) = 0 \end{array}$$

Comme  $\pi_2(\mathbf{CP}^k) = H_2(\mathbf{CP}^k)$ , on a que  $\pi_2 f$  est la multiplication par  $c_1(E')$ . Vu que  $\pi_1(S^n) = 0$ , il en résulte que  $c_1(E') = \pm 1$ . On peut donc choisir le morphisme de fibré ci-dessus de manière que  $f$  soit un difféomorphisme (l'identité ou la conjugaison complexe). L'application  $\tilde{f}: S^n \rightarrow S^n$  sera alors un difféomorphisme  $S^1$ -équivariant.

*Démonstration de a) pour  $G = S^3$ .* On procède exactement comme dans le cas de  $S^1$ . Le rôle de  $\mathbf{CP}^k$  est remplacé par l'espace projectif quaternionien  $\mathbf{HP}^k$ . Tout  $S^3$ -fibré sur un complexe de dimension  $4k$  est induit du fibré de Hopf  $S^n \rightarrow \mathbf{HP}^k$ . On a donc un morphisme de  $S^3$ -fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{HP}^k & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbf{HP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de  $f$  représente la seconde classe de Chern  $c_2(\xi) \in H^4(\mathbf{HP}^k; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ . Comme  $\pi_3(S^n) = 0$ , on déduit, comme dans le cas précédent que  $c_2(E') = \pm 1$  et donc  $f$  est homotope à un difféomorphisme (donc  $\tilde{f}$  à un difféomorphisme équivariant).

*Démonstration de b.* Elle est en tout point semblable à celle de a).

*Démonstrations de c) et d).* Supposons que  $\alpha$  est  $QL$  associée à l'action linéaire  $\alpha'$ . Soit  $(B, \beta)$  un  $G$ -cobordisme  $G$ -inversible à droite, entre  $(S^n, \alpha')$  et  $(S^n, \alpha)$  comme construit dans la démonstration du théorème (2.1). On vérifie sur la construction que l'action de  $G$  sur  $B$  est libre. Comme  $B$  est un  $h$ -cobordisme, le quotient  $W = G \backslash B$  est donc un  $h$ -cobordisme entre  $V_{\alpha'}$  et  $V_{\alpha}$ . Par le lemme (3.3), on a un difféomorphisme de  $H V_{\alpha} \times ]0, \infty[ \rightarrow V_{\alpha'} \times ]0, \infty[$ .

Pour terminer la démonstration, il suffit de construire un difféomorphisme  $G$ -équivariant  $h: (S^n \times ]0, \infty[, \alpha) \rightarrow (S^n \times ]0, \infty[, \alpha')$  (actions produit). En effet, comme  $(S^n \times ]0, \infty[, \alpha')$  est  $G$ -difféomorphe à  $(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha')$  (puisque  $\alpha'$  est linéaire),  $h|_{S^n \times \{0\}}$  sera alors un plongement  $S^1$ -équivariant de  $(S^n, \alpha)$  dans  $(\mathbf{R}^{n+1}, \alpha')$ , ce qui montre que  $\alpha$  est  $QL$  associée à  $\alpha'$ .

Le difféomorphisme  $h$  se construit de la même manière que dans le cas a) (remplaçant  $V_{\alpha}$  par  $V_{\alpha} \times \mathbf{R}$ , etc. les détails sont laissés au lecteur. Enfin, si  $h: V_{\alpha} \times \mathbf{R} \rightarrow V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$  est un difféomorphisme, le cobordisme entre  $h(V_{\alpha} \times \{0\})$  et  $V_{\alpha'} \times \{t\}$ , pour  $t$  assez grand, est clairement un  $h$ -cobordisme.

#### 4. ACTIONS LIBRES D'UN GROUPE CYCLIQUE FINI

Soit  $C_q$  le groupe cyclique d'ordre  $q$ . Dans ce paragraphe, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

(4.1) THÉORÈME. *Si  $q = 2, 3, 4$  ou  $6$ , toute action  $QL$  libre de  $C_q$  sur  $S^n$  ( $n \geq 5$ ) est différentiablement conjuguée à son action linéaire associée.*