Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES
Autor: Hausmann, Jean-Claude
Kapitel: 3. Actions libres – Résultats généraux
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59482

3. Actions libres – Résultats généraux

Soit G un groupe de Lie compact. Si $\alpha: G \times S^n \to S^n$ est une action, on dénotera par V_α l'espace des orbites. Rappelons que si α est libre, V_α est une variété différentiable et la projection $S^n \to V_\alpha$ est un G-fibré principal (voir [Br], paragraphes II.1 et II.5). Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

(3.1) Théorème. *Soient* $\alpha, \alpha': G \times S^n \to S^n$ *deux actions libres, où* G *est un groupe de Lie compact. On suppose que* α' *est une action linéaire. Alors:*

a) α *est différentiablement conjuguée à* α' *si et seulement si* V_α *et* $V_{\alpha'}$, *sont difféomorphes.*

b) α *est topologiquement conjuguée à* α' *si et seulement si* V_α *et* $V_{\alpha'}$ *sont homéomorphes.*

c) *Si* $n - \dim G \geqslant 4$, α *est une action QL associée à* α' *si et seulement si* V_α *et* $V_{\alpha'}$ *sont h-cobordantes.*

d) *Si* $n - \dim G \geqslant 4$, α *est une action QL associée à* α' *si et seulement si* $V_\alpha \times \mathbf{R}$ *et* $V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$ *sont difféomorphes.*

La démonstration de (3.1) utilise deux lemmes, probablement bien connus des spécialistes:

(3.2) Lemme. *Soit* α *une action linéaire d'un groupe de Lie* G *sur* S^n. *Supposons qu'il s'agisse d'une action libre. Alors,* G *est ou bien fini ou bien isomorphe à* S^1 *ou* S^3. *De plus:*

a) *Si* $G = S^1$, *alors* $n = 2k + 1$ *et* α *est linéairement conjuguée à l'action diagonale standard de* S^1 *sur l'espace complexe* $\mathbf{C}^{k+1}$.

b) *Si* $G = S^3$, *alors* $n = 4k + 3$ *et* α *est linéairement conjuguée à l'action diagonale standard de* S^3 *sur l'espace quaternionique* $\mathbf{H}^{k+1}$.

Démonstration. Les sous-représentations irréductibles de α donneront aussi une action libre sur leur sphère. On peut donc se restreindre au cas où α est irréductible. Supposons tout d'abord que G est connexe.

Si G est abélien et $\alpha: G \to SO_n$ est irréductible, alors $n = 2$. Comme α doit être injectif pour donner une action libre sur S^1, on aura $G = S^1$ et α est l'identité ou la conjugaison complexe, qui sont linéairement conjuguées dans le groupe O_2.

Dans le cas non-abélien, l'argument ci-dessus s'applique au tore maximal de G qui doit donc être de dimension 1. Cela implique que G est isomorphe à S^3 ou SO_3. La liste des représentations irréductibles de ces deux groupes est connue ([Vi], pp. 78-79 et 113). On vérifie aisément que les représentations irréductibles de SO_3 admettent un vecteur de groupe d'isotripie SO_2 et que, pour celles de S^3, seule la représentation standard sur $\mathbf{H}$ est sans valeur propre 1. Dans le cas général, on peut appliquer ce qui précède à la composante connexe G_1 de l'élément neutre de G. On a donc $G_1 = S^1$ ou S^3. Occupons-nous du premier cas, le cas $G = S^3$, qui se traite similairement, sera laissé au lecteur. On peut donc identifier le quotient $G_1\backslash S^3$ avec $\mathbf{CP}^k$ de manière que le S^1-fibré principal $S^n \to \mathbf{CP}^k$ est le fibré de Hopf.

Soit $\gamma \in G$ et dénotons par $\bar{\gamma}$ sa classe dans $G_1\backslash G = \pi_0(G)$. Ce dernier groupe opère librement sur $G_1\backslash S^n = \mathbf{CP}^k$, ce qui nous permet de considérer la paire $(\gamma, \bar{\gamma})$ comme un morphisme du fibré de Hopf η sur lui-même:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\gamma} & S^n \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \mathbf{CP}^k & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \mathbf{CP}^k \end{array}$$

L'existence de γ au-dessus de $\bar{\gamma}$ n'est possible que si $\bar{\gamma}$ induit l'identité sur $H^2(\mathbf{CP}^k;\mathbf{Z})$ et donc sur toute la cohomologie de $\mathbf{CP}^k$. Son nombre de Lefschetz est donc positif, ce qui, par le théorème du point-fixe de Lefschetz, contredit le fait que γ n'a pas de point fixe.

(3.3) LEMME. *Soit (W^n, M, N) un h-cobordisme de dimension $n \geqslant 5$. Alors W est inversible et $M \times \mathbf{R}$ est difféomorphe à $N \times \mathbf{R}$.*

Démonstration. Si $n > 5$, l'inversibilité de W est classique ([Po], Corollaire 6, p. 18). Dans le cas $n = 5$, on considère $W \times [0,1]$ comme un h-cobordisme entre $M \times [0,1]$ et $P = W \times \{0\} \cup N \times [0,1] \cup W \times \{1\}$. Soit $(Z, M \times [1,2], Q)$ un h-cobordisme tel que sa torsion de Whitehead $\tau(Z, M \times [1,2])$ soit égale à $-\tau(W \times [0,1], M \times [0,1]) = -\tau(W, M)$. L'union de $W \times [0,1]$ avec Z (le long d'un col de $M \times \{1\}$ dans $W \times \{1\}$ et dans Q) donne un s-cobordisme entre $M \times [0,2]$ et $P \cup Q$. Par le théorème du s-cobordisme, $P \cup Q = W \times \{0\} \cup ((P \cup Q) - W \times \{0\})$ est difféomorphe à $M \times [0,2]$. On voit que W est inversible à droite. Un argument similaire montre que W est inversible à gauche.

On a donc, si $n > 4$, un h-cobordisme $(\bar{W}, N, M)$ avec $W \cup \bar{W} = M \times [0,1]$ et $\bar{W} \cup W \cong N \times [0,1]$. Ceci montre que $M \times \mathbf{R}$ est difféomorphe à $N \times \mathbf{R}$ par l'argument classique:

$$\begin{aligned} M \times \mathbf{R} &= \ldots \cup (W \cup \bar{W}) \cup (W \cup \bar{W}) \cup \ldots \\ &= \ldots \cup (\bar{W} \cup W) \cup (\bar{W} \cup W) \cup \ldots = N \times \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Preuve du théorème (3.1). Démontrons tout d'abord le point a). Par le lemme 3.2, il suffit de considérer les cas G fini, $G = S^1$ et $G = S^3$.

Démonstration de a) pour G fini. Soit $h: V_\alpha \to V_{\alpha'}$ un difféomorphisme. Les projections $S^n \to V_\alpha$ et $S^n \to V_{\alpha'}$ s'identifient aux revêtements universels de V_α et de $V_{\alpha'}$. Le difféomorphisme h se relève donc en un difféomorphisme $\tilde{h} : S^n \to S^n$ qui est G-équivariant.

Démonstration de a) pour $G = S^1$. Par le lemme 3.2 a), la variété $V_{\alpha'}$ est difféomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^{k-1}$. On a donc un difféomorphisme $h: V_\alpha \to \mathbf{CP}^k$. La composition de la projection $S^n \to V_\alpha$ avec h donne un S^1-fibré principal $\zeta: S^n \to \mathbf{CP}^k$. Rappelons que le fibré de Hopf $\varphi: S^n \to \mathbf{CP}^k$ est universel pour les S^1-fibrés principaux sur des complexes de dimension $2k$. On a donc un morphisme de fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\bar{f}} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{CP}^k & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de f (composée avec l'inclusion de $\mathbf{CP}^k$ dans $\mathbf{CP}^\infty$) représente la 1[re] classe de Chern $c_1(\xi) \in H^2(\mathbf{CP}^k; \mathbf{Z})$. Comparons les suites exactes d'homotopie de ces fibrés:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \pi_2(S^n) & \to & \pi_2(\mathbf{CP}^k) & \to & \pi_1(S^1) & \to & \pi_1(S^n) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \pi_2 f & & \| & & \downarrow \\ 0 = \pi_2(S^n) & \to & \pi_2(\mathbf{CP}^k) & \to & \pi_1(S^1) & \to & \pi_1(S^n) = 0 \end{array}$$

Comme $\pi_2(\mathbf{CP}^k) = H_2(\mathbf{CP}^k)$, on a que $\pi_2 f$ est la multiplication par $c_1(E')$. Vu que $\pi_1(S^n) = 0$, il en résulte que $c_1(E') = \pm 1$. On peut donc choisir le morphisme de fibré ci-dessus de manière que f soit un difféomorphisme (l'identitité ou la conjugaison complexe). L'application $\tilde{f} : S^n \to S^n$ sera alors un difféomorphisme S^1-équivariant.

Démonstration de a) pour $G = S^3$. On procède exactement comme dans le cas de S^1. Le rôle de $\mathbf{CP}^k$ est remplacé par l'espace projectif quaternionien $\mathbf{HP}^k$. Tout S^3-fibré sur un complexe de dimension $4k$ est induit du fibré de Hopf $S^n \to \mathbf{HP}^k$. On a donc un morphisme de S^3-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{HP}^k & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbf{HP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de f représente la seconde classe de Chern $c_2(\xi) \in H^4(\mathbf{HP}^k;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Comme $\pi_3(S^n) = 0$, on déduit, comme dans le cas précédent que $c_2(E') = \pm 1$ et donc f est homotope à un difféomorphisme (donc $\tilde{f}$ à un difféomorphisme équivariant).

Démonstration de b. Elle est en tout point semblable à celle de a).

Démonstrations de c) et d). Supposons que α est QL associée à l'action linéaire α'. Soit (B, β) un G-cobordisme G-inversible à droite, entre (S^n, α') et (S^n, α) comme construit dans la démonstration du théorème (2.1). On vérifie sur la construction que l'action de G sur B est libre. Comme B est un h-cobordisme, le quotient $W = G\backslash B$ est donc un h-cobordisme entre $V_{\alpha'}$ et V_α. Par le lemme (3.3), on a un difféomorphisme de $H\, V_\alpha \times]0, \infty[$ $\to V_{\alpha'} \times]0, \infty[$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de construire un difféomorphisme G-équivariant $h: (S^n \times]0, \infty[, \alpha) \to (S^n \times]0, \infty[\alpha')$ (actions produit). En effet, comme $(S^n \times]0, \infty[\alpha')$ est G-difféomorphe à $(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha')$ (puisque α' est linéaire), $h|S^n \times \{0\}$ sera alors un plongement S^1-équivariant de (S^n, α) dans (R^{n+1}, α'), ce qui montre que α est QL associée à α'.

Le difféomorphisme h se construit de la même manière que dans le cas a) (remplaçant V_α par $V_\alpha \times \mathbf{R}$, etc. les détails sont laissés au lecteur. Enfin, si $h: V_\alpha \times \mathbf{R} \to V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$ est un difféomorphisme, le cobordisme entre $h(V_\alpha \times \{0\})$ et $V_{\alpha'} \times \{t\}$, pour t assez grand, est clairement un h-cobordisme.

4. Actions libres d'un groupe cyclique fini

Soit C_q le groupe cyclique d'ordre q. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

(4.1) THÉORÈME. *Si $q = 2, 3, 4$ ou 6, toute action QL libre de C_q sur* S^n *$(n \geqslant 5)$ est différentiablement conjuguée à son action linéaire associée.*