4. Actions libres d'un groupe cyclique fini

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Démonstration de a) pour $G = S^3$. On procède exactement comme dans le cas de S^1. Le rôle de $\mathbf{CP}^k$ est remplacé par l'espace projectif quaternionien $\mathbf{HP}^k$. Tout S^3-fibré sur un complexe de dimension $4k$ est induit du fibré de Hopf $S^n \to \mathbf{HP}^k$. On a donc un morphisme de S^3-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{HP}^k & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbf{HP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de f représente la seconde classe de Chern $c_2(\xi) \in H^4(\mathbf{HP}^k; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Comme $\pi_3(S^n) = 0$, on déduit, comme dans le cas précédent que $c_2(E') = \pm 1$ et donc f est homotope à un difféomorphisme (donc $\tilde{f}$ à un difféomorphisme équivariant).

Démonstration de b. Elle est en tout point semblable à celle de a).

Démonstrations de c) et d). Supposons que α est QL associée à l'action linéaire α'. Soit (B, β) un G-cobordisme G-inversible à droite, entre (S^n, α') et (S^n, α) comme construit dans la démonstration du théorème (2.1). On vérifie sur la construction que l'action de G sur B est libre. Comme B est un h-cobordisme, le quotient $W = G\backslash B$ est donc un h-cobordisme entre $V_{\alpha'}$ et V_α. Par le lemme (3.3), on a un difféomorphisme de $H\,V_\alpha \times]0, \infty[$ $\to V_{\alpha'} \times]0, \infty[$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de construire un difféomorphisme G-équivariant $h: (S^n \times]0, \infty[, \alpha) \to (S^n \times]0, \infty[\alpha')$ (actions produit). En effet, comme $(S^n \times]0, \infty[\alpha')$ est G-difféomorphe à $(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha')$ (puisque α' est linéaire), $h|S^n \times \{0\}$ sera alors un plongement S^1-équivariant de (S^n, α) dans (R^{n+1}, α'), ce qui montre que α est QL associée à α'.

Le difféomorphisme h se construit de la même manière que dans le cas a) (remplaçant V_α par $V_\alpha \times \mathbf{R}$, etc. les détails sont laissés au lecteur. Enfin, si $h: V_\alpha \times \mathbf{R} \to V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$ est un difféomorphisme, le cobordisme entre $h(V_\alpha \times \{0\})$ et $V_{\alpha'} \times \{t\}$, pour t assez grand, est clairement un h-cobordisme.

4. Actions libres d'un groupe cyclique fini

Soit C_q le groupe cyclique d'ordre q. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

(4.1) THÉORÈME. *Si $q = 2, 3, 4$ ou 6, toute action QL libre de C_q sur* S^n *$(n \geqslant 5)$ est différentiablement conjuguée à son action linéaire associée.*

(4.2) THÉORÈME. *Soit* α *une action linéaire libre de* C_q *sur* S^n. *Supposons que* $q \neq 2, 3, 4$ *ou* 6 *et* $n \geqslant 5$. *Alors il existe une infinité dénombrable d'actions* QL *de* C_q *sur* S^n *associées à* α, *qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action linéaire.*

Démonstration de (4.1). Soit α une action linéaire libre de C_q sur S^n et α' une action QL associée à α. Par le théorème (3.1) cas c), les variétés quotient V_α et $V_{\alpha'}$ sont h-cobordantes. Si $q = 2$, 3, 4 ou 6, le groupe de Whitehead $Wh(C_q)$ est nul [Co], (11.5). Comme $\pi_1(V_\alpha) = C_q$ et $n \geqslant 5$, le théorème du s-cobordisme [Ke], p. 32 assure que V_α et $V_{\alpha'}$ sont difféomorphes. Les actions α et α' sont donc différentiablement conjuguées par le cas a) du théorème (3.1).

Démonstration de (4.2). Si $q \neq 2$, 3, 4 ou 6, le groupe de Whitehead $Wh(C_q)$ est infini dénombrable ([Co], (11.5)). Pour chaque $\gamma \in Wh(C_q)$, il existe un h-cobordisme $(W_\gamma, V_\alpha, V_{\alpha(\gamma)})$ dont la torsion de Whitehead $\tau(W_\gamma, V_\alpha) = \gamma \in Wh(V_\alpha)$ ([Ke], p. 32). Le revêtement universel $\widetilde{W}_\gamma$ de W_γ est un h-cobordisme entre S^n et $V_{\alpha(\gamma)}$. Par le théorème du h-cobordisme, on en déduit que $V_{\alpha(\gamma)}$ est difféomorphe à S^n, ce qui donne une action QL $\alpha(\gamma)$ sur S^n associée à α (par le cas c) du théorème (3.1)).

Nous affirmons que les classes de conjugaison topologique de ces $(S^n, \alpha(\gamma))$ contiennent au plus un nombre fini d'éléments. En effet, dans le cas contraire, on aurait, pour une collection infinie de $\gamma \in Wh(C_q)$, un homéomorphisme h_γ de $V_\alpha(\gamma)$ sur une variété fixe A. Soit $g_\gamma\colon V_\alpha \to V_{\alpha(\gamma)}$ la composition de l'inclusion $V_\alpha \subset W_\gamma$ avec la rétraction de W_γ sur $V_{\alpha(\gamma)}$, et soit $f_\gamma\colon V_\alpha \to A$ l'équivalence d'homotopie $f_\gamma = h_\gamma \circ g_\gamma$. Comme $\tau(h_\gamma) = 0$ [Co], p. 102, on a

$$\tau(f_\gamma) = h_{\gamma *}(\tau(g_\gamma)) = h_{\gamma *}(\gamma + (-1)^{n+1}\bar{\gamma})$$

(voir [Mi], p. 401). Dans $Wh(C_q)$ on a $\gamma = \bar{\gamma}$ par [Mi], Lemma 6.7 et [Co], 11.5. D'où $\tau(f_\gamma) = h_{\gamma *}(2\gamma)$. On en déduit que pour une infinité de γ, les applications f_γ sont deux-à-deux non-homotopes. Ceci contredit le fait, facilement visible par la théorie des obstructions, que l'ensemble des classes d'homotopie d'équivalences d'homotopie de V_α dans A est fini.

On peut donc extraire un ensemble dénombrable Ω de $(S_n, \alpha(\gamma))$ qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées. Les classes de conjugaison de représentations linéaires de C^q dans $\mathbf{R}^{n+1}$ étant en nombre fini, seul un sous-ensemble fini de Ω peut donc être constitué d'actions topologiquement conjuguées à une action linéaire.

(4.3) *Remarques.*

a) Les actions du théorème (4.2) sont essentiellement celles construites par Milnor [Mi2]. A l'époque, on ne disposait pas de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead, ce qui empêchait Milnor de déduire qu'elles n'étaient pas topologiquement conjuguées à une action linéaire.

b) La démonstration de (4.2) se généralise au cas d'actions libres d'un groupe fini G sur S^n, pourvu que $Wh(G)$ contienne une infinité d'éléments τ tels que $\tau = \bar{\tau}$. C'est, par exemple le cas du groupe du dodécaèdre à 120 éléments (voir [Ha], chapitre 5) qui agit librement sur S^{4k-1}.

c) Il est connu que le groupe de chirurgie $L_2(C_q)$ est infini si $q > 2$ [Ba]. On déduit alors de la suite exacte de la chirurgie (et de la théorie du lissage) pour un espace lenticulaire V^6 avec groupe fondamental C_q qu'il existe une infinité dénombrable de variétés W^6 homotopiquement équivalente à V qui sont deux-à-deux non-topologiquement h-cobordantes. Leurs revêtements universels sont des sphères d'homotopie de dimension 6 donc difféomorphes à S^6. Cet argument montre que pour $q > 2$, il existe une infinité d'actions libres de C_q sur S^6 qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action QL.

5. Actions libres de S^1

Nous commencerons par les actions libres de S^1 sur S^3.

(5.1) Proposition. *Toute action libre de S^1 sur S^3 est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Une action libre de S^1 sur S^3 donne un fibré principal $p: S^3 \to S^1 \backslash S^3 = V$ (voir le paragraphe 3). On en déduit que V est une surface qui, par suite exacte du fibré p est simplement connexe. Il s'en suit que V est difféomorphe à S^2. Le fibré p est induit du fibré de Hopf par une application $f: V \to S^2$. Comme dans la démonstration du cas a) du théorème (3.1), on déduit que le degré de f est ± 1 et donc f est homotope à un difféomorphisme. Ce difféomorphisme se relève, au niveau des espaces totaux, en un difféomorphisme S^1-équivariant qui conjugue notre action de départ avec l'action standard.

(5.2) Théorème. *Toute action libre QL de S^1 sur S^n, avec $n \geqslant 7$, est différentiablement conjuguée à l'action standard.*