Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

Autor: Hausmann, Jean-Claude

Kapitel: 5. Actions libres de S^1

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59482

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(4.3) *Remarques.*

a) Les actions du théorème (4.2) sont essentiellement celles construites par Milnor [Mi2]. A l'époque, on ne disposait pas de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead, ce qui empêchait Milnor de déduire qu'elles n'étaient pas topologiquement conjuguées à une action linéaire.

b) La démonstration de (4.2) se généralise au cas d'actions libres d'un groupe fini G sur S^n, pourvu que $Wh(G)$ contienne une infinité d'éléments τ tels que $\tau = \bar{\tau}$. C'est, par exemple le cas du groupe du dodécaèdre à 120 éléments (voir [Ha], chapitre 5) qui agit librement sur S^{4k-1}.

c) Il est connu que le groupe de chirurgie $L_2(C_q)$ est infini si $q > 2$ [Ba]. On déduit alors de la suite exacte de la chirurgie (et de la théorie du lissage) pour un espace lenticulaire V^6 avec groupe fondamental C_q qu'il existe une infinité dénombrable de variétés W^6 homotopiquement équivalente à V qui sont deux-à-deux non-topologiquement h-cobordantes. Leurs revêtements universels sont des sphères d'homotopie de dimension 6 donc difféomorphes à S^6. Cet argument montre que pour $q > 2$, il existe une infinité d'actions libres de C_q sur S^6 qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action QL.

5. Actions libres de S^1

Nous commencerons par les actions libres de S^1 sur S^3.

(5.1) Proposition. *Toute action libre de S^1 sur S^3 est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Une action libre de S^1 sur S^3 donne un fibré principal $p: S^3 \to S^1 \backslash S^3 = V$ (voir le paragraphe 3). On en déduit que V est une surface qui, par suite exacte du fibré p est simplement connexe. Il s'en suit que V est difféomorphe à S^2. Le fibré p est induit du fibré de Hopf par une application $f: V \to S^2$. Comme dans la démonstration du cas a) du théorème (3.1), on déduit que le degré de f est ± 1 et donc f est homotope à un difféomorphisme. Ce difféomorphisme se relève, au niveau des espaces totaux, en un difféomorphisme S^1-équivariant qui conjugue notre action de départ avec l'action standard.

(5.2) Théorème. *Toute action libre QL de S^1 sur S^n, avec $n \geqslant 7$, est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Soit (S^n, α) une telle action. Par le lemme (3.2), on sait que l'action linéaire associée α' est standard. Par le théorème (3.1), il existe un h-cobordisme $(W^n, V_{\alpha'}, V_\alpha)$. Comme W est simplement connexe et $n \geqslant 7$, le théorème du h-cobordisme implique que W est difféomorphe à $V_{\alpha'} \times [0,1]$. On en déduit, par le cas a) du théorème (3.1) que α et α' sont différentiablement conjuguées.

(5.3) *Remarque.* Il existe, en général, une infinité dénombrable d'actions libre de S^1 sur S^n qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées (voir [Hs] pour un exemple dans le cas $n = 11$). Ces actions ne sont donc pas topologiquement conjuguées à une action QL.

La situation pour les actions libres de S^1 sur S^n, pour $n \geqslant 7$ peut donc se schématiser de la façon suivante:

$$\text{actions linéaires } =_{\text{diff}} \text{ actions } QL \neq_{\text{TOP}} \text{ actions générales.}$$

En revanche, pour les actions libres de S^1 sur S^5, on va voir que l'on a:

$$\text{actions linéaires } =_{\text{TOP}} \text{ actions } QL =_{\text{DIFF}} \text{ actions générales}$$

et que l'égalité actions linéaires $=_{diff}$ actions QL constitue un problème ouvert. De manière précise:

(5.4) THÉORÈME. *a) Toute action libre de S^1 sur S^5 est différentiablement conjuguée à une action QL et topologiquement conjuguée à l'action standard.*

b) L'ensemble des classes de conjugaison différentiable d'actions QL libres de S^1 sur S^5 se surjecte sur l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur $\mathbf{CP}^2$. *Les préimages de cette surjection ont au plus 2 éléments.*

Remarque. La détermination de l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur $\mathbf{CP}^2$ constitue un problème ouvert. On ne sait même pas si cet ensemble est fini (le même ensemble, pour certaines sommes connexes de $\pm\mathbf{CP}^2$, est infini [FM]). Dans l'état actuel des connaissances il est bien sûr possible que cet ensemble soit réduit à un seul élément, auquel cas toute action libre serait différentiablement conjuguée à l'action standard (voir le corollaire (5.5) ci-dessous).

Démonstration. Soit (S^5, α) une action différentiable libre de S^1 sur S^5. Le quotient $V_\alpha = S^1 \backslash S^5$ est une variété de dimension 4 et la projection $p: S^5 \to V_\alpha$ est un S^1-fibré principal, induit du fibré de Hopf η. On a donc un morphisme de S^1-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \rightarrow & S^5 \\ \downarrow p & & \downarrow \eta \\ V_\alpha & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^2 \end{array}$$

Avec la suite exacte d'homotopie, on vérifie que f est une équivalence d'homotopie. Un théorème de C.T.C. Wall [Ki], Theorem 1 p. 59 implique que V_α et $\mathbf{CP}^2$ sont h-cobordante ce qui, par le théorème (3.1), entraîne que α est différentiablement conjuguée à une action QL (l'action linéaire associée étant standard). De plus, le théorème du h-cobordisme topologique de M. Freedmann [Fr], théorème 1.3 implique que V_α est homéomorphe à $\mathbf{CP}^2$. L'action α est donc topologiquement conjuguée à l'action standard (Théorème (3.1), cas b). Ceci démontre le point a) et permet de définir l'application du point b): à une action QL libre α on associe sa variété quotient V_α.

Soit V une variété différentiable homéomorphe à $\mathbf{CP}^2$. Par le théorème de Wall cité ci-dessus, il existe un h-cobordisme $(W, \mathbf{CP}^2, V)$. Le fibré de Hopf sur $\mathbf{CP}^2$ s'étend en un S^1-fibré principal sur W qui, par restriction à V donne un S^1-fibré principal $E \rightarrow V$. Par le théorème du h-cobordisme, E est difféomorphe à S^5. On obtient ainsi une action α libre de S^1 sur S^5 qui est QL par le théorème (3.1), avec $V_\alpha = V$. Cela démontre que notre correspondance est surjective. D'autre part, soient α et α' sont deux actions libres dont les quotients sont difféomorphes à V. Les projections de S^5 sur V_α et $V_{\alpha'}$ sont donc équivalentes à deux S^1-fibrés principaux sur V. Comme dans la démonstration du théorème 3.1, on vérifie que les premières classes de Chern de ces fibrés sont des générateurs de $H^2(V;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Cela montre que V a au plus deux préimages qui seront confondues si et seulement si V possède un difféomorphisme sur lui-même induisant la multiplication par -1 sur $H^2(V;\mathbf{Z})$. Cela achève la preuve du point b) et démontre le corollaire suivant:

(5.5) COROLLAIRE. *Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1) *Toute action libre de* S^1 *sur* S^5 *est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

2) *Toute variété différentiable homéomorphe à* $\mathbf{CP}^2$ *est difféomorphe à* $\mathbf{CP}^2$.