7. Exemples d'actions quasi linéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

7. EXEMPLES D'ACTIONS QUASI LINÉAIRES

Dans ce paragraphe, nous considérerons la «donnée» suivante:

— M^{n+1} est une variété riemanienne,

— G est un groupe de Lie compact opérant sur M par isométries,

— $f: M \to \mathbf{R}$ est une application différentiable telle que $f(gx) = f(x)$ pour tout $x \in M$ et $g \in G$.

— L'application f a un unique point critique $p \in M$, qui est un extremum. Le point p est donc un point fixe pour l'action de G. On choisit une isométrie h entre l'espace tangent T_pM et $\mathbf{R}^{n+1}$ avec son produit scalaire standard. L'action induite de G sur T_pM est donc transportée par h en une action orthogonale de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$ que nous noterons α,

— Soit $q \in \mathbf{R}$ une valeur régulière de f. On suppose que la variété $f^{-1}(\{q\})$ est difféomorphe à S^n. Remarquons que $f^{-1}(\{q\})$ est une G-variété.

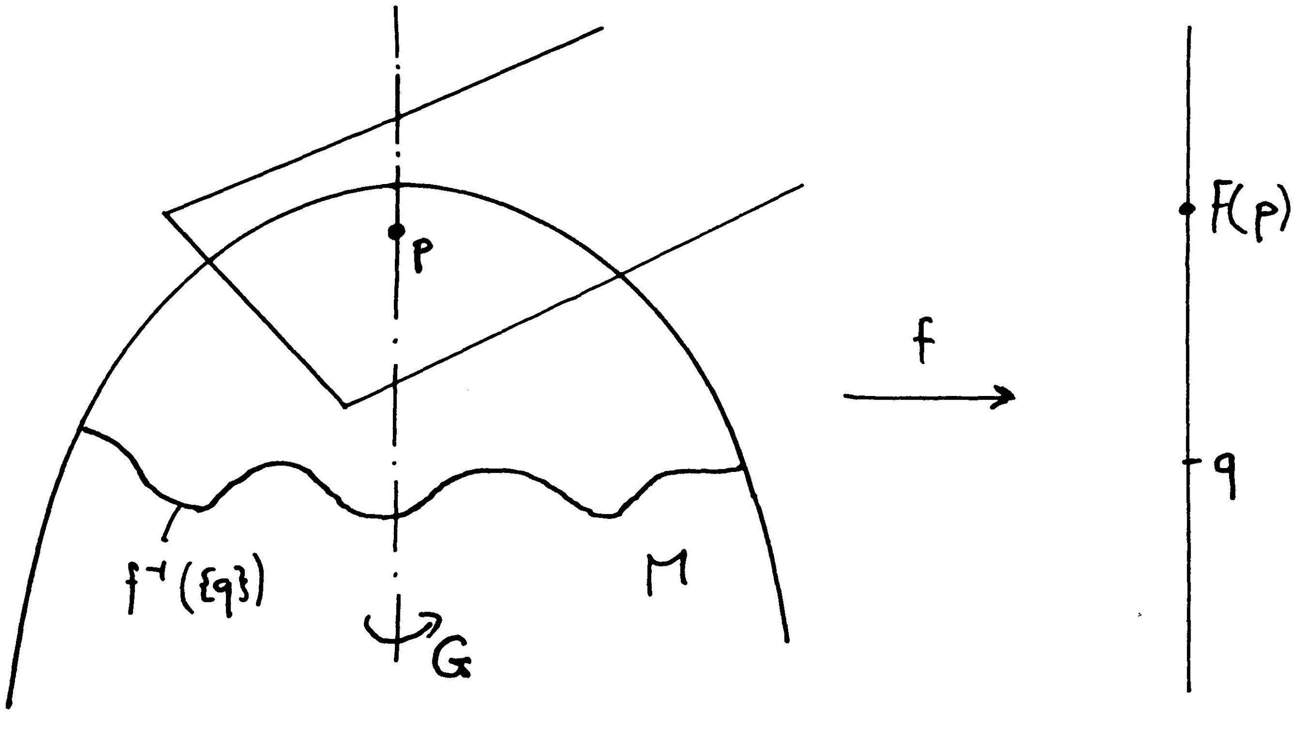

FIGURE 3

Pour une telle donnée, nous allons démontrer les trois propositions suivantes:

(7.1) PROPOSITION. *L'action de* G *sur* $f^{-1}(\{q\})$ *est QL associée à* α.

(7.2) PROPOSITION. *Supposons que* p *est un extremum non dégénéré. Alors l'action de* G *sur* $f^{-1}(\{q\})$ *est différentiablement conjuguée à* α.

(7.3) PROPOSITION *Soit* α' *une action* QL *libre de* G *sur* S^n *associée à l'action linéaire* α. *Alors il existe une donnée comme ci-dessus pour laquelle l'action de* G *sur* $f^{-1}(\{q\})$ *est différentiablement conjuguée à* α'.

Preuves. Soit U un voisinage de O dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = \exp \circ h : U \to M$ fournisse une carte au voisinage de p. On supposera que p est un minimum et que $f(p) = 0$. Comme p est l'unique point critique de f, il existe q' tel que $0 < q' < q, f^{-1}(\{q'\}) \subset \varphi(U)$ et $f^{-1}(\{q\})$ admet un difféomorphisme G-équivariant sur $f^{-1}(\{q'\})$ (on utilise le flot du champ $\operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|$ (voir [Mi3], Theorem 3.4). Comme $\varphi^{-1} | f^{-1}(\{q\})$ est un plongement G-équivariant de $f^{-1}(\{q\})$ dans $(\mathbf{R}^{n+1}, \alpha)$ cela prouve la proposition (7.1).

Si maintenant p est un minimum non-dégénéré, le lemme de Morse fournit une carte ψ telle que $f \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Dans ce système de coordonnées, les variétés de niveau de f sont des sphères standards qui intersectent donc chaque rayon de $\mathbf{R}^{n+1}$ transversalement. On en déduit que $(f \circ \varphi)^{-1}(\{q'\})$ intersecte chaque rayon de $\mathbf{R}^{n+1}$ transversalement, si q' est suffisamment petit. On a alors un difféomorphisme équivariant de $(f \cdot \varphi)^{-1}(\{q'\})$ sur la sphère de rayon 1 par la projection radiale. Cela démontre (7.2). Pour démontrer (7.3), on va construire la fonction f pour $M = \mathbf{R}^{n+1}$ muni de l'action α. Si α' une action libre QL associée à α, on a, par le point d) du théorème (3.1), un difféomorphisme G-équivariant $g : (S^n \times \mathbf{R}, \alpha) \to (S^n \times \mathbf{R}, \alpha')$ (actions produits). Posons $g(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$. Soit

$$w(x, t) = e^{g_2(x, \log t)} .$$

On a donc un difféomorphisme G-équivariant de

$$(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha) = (S^n \times]0, \infty[, \alpha)$$

sur $(S^n \times]0, \infty[, \alpha')$ pour les actions produits donné par

$$(x, t) \mapsto (g_1(x, t), w(x, t)) .$$

On définit $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ par:

$$f(x, t) = e^{-1/w(x,t)^2} \quad \text{et} \quad f(0) = 0 .$$

Comme le difféomorphisme g est en quelque sorte «périodique» (voir sa construction dans la preuve de (3.1)), on a que toutes les dérivées partielles, de tout ordre, de g sont bornées et de plus $t - 2 \leqslant g_2(x, t) \leqslant t + 2$. On en déduit que toutes les dérivées partielles de $w(x, t)$ sont bornées. Il s'en suit que f est de classe C^∞ avec toutes les dérivées partielles s'annulant en 0. On vérifie aisément que f a les propriétés voulues, ce qui démontre (7.3).

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAK, A. The computation of surgery groups of finite groups with abelian 2-hyperelementary subgroups. *Proc. Evanston K-theory conf. (1976).* Springer Lect. Notes 551, 384-409.

[Br] BREDON, G. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press 1972.

[Co] COHEN, M. *A course in simple-homotopy theory.* Springer-Verlag 1973.

[Fr] FREEDMANN, M. The topology of 4-dimensional manifolds. *Journal of Differential geometry 17* (1982), 357-453.

[F-M] FRIEDMANN, R. and J. MORGAN. On the diffeomorphism type of certain surfaces I. *Journal of Differential geometry 27* (1988), 297-369.

[Ha] HAUSMANN, J.-Cl. *Groupes de sphères d'homologie entières.* Thèse, Université de Genève, 1974.

[Ha2] —— Sur la topologie des bras articulés. *Algebraic topology,* Poznan. Springer Lecture Notes 1474 (1989), 146-159.

[Hs] HSIANG, W. C. and W. Y. HSIANG. Some free actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres. *Quarterly J. of Math. 15* (1964), 371-374.

[Ke] KERVAIRE, M. Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. AMS 144* (1969), 67-72.

[Ke2] —— Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Comm. Math. Helv. 40* (1965), 31-42.

[Ki] KIRBY, R. *The topology of 4-manifolds.* Springer Lect. Notes 1374 (1989).

[Mi] MILNOR, J. Whitehead torsion. *Bull. American Math. Soc. 72* (1966), 358-426.

[Mi2] —— Some free action of cyclic groups on spheres. *Differentiable Analysis,* Proc. conf. Bombay (1964), Oxford Univ. Press.

[Mi3] —— *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton Univ. Press 1965.

[Po] POENARU, V. Le théorème du *s*-cobordisme. *Séminaire Bourbaki* (Fév. 1971) exposé n° 392.

[Ro] ROTHENBERG, M. Torsion invariants and finite transformation groups. *Proc. of Symp. in pure Math.,* AMS, Stanford 1976, 267-312.

[Vi] VINBERG, E. *Linear representations of groups.* Birkhäuser 1989.

(Reçu le 13 mai 1991)

Jean-Claude Hausmann

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH-1211 Genève 24 (Suisse)