2. Identités entre fonctions caractéristiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Puisque

$$1 - x^{m_i} = - x^{m_i}(1 - x^{-m_i}) ,$$

on peut au besoin changer m_i en $-m_i$, et supposer que $\lambda(m_i) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, si $\mathbf{Z}[[M]]_+$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{Z}[[M]]$ formé des séries à support dans le demi-espace ouvert $(\lambda > 0)$, on a: $\varphi(C) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$, donc

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$$

ce qui contredit (1). $\square$

Pour tout cône C, on pose $\Phi(C) = \mathscr{S}(\varphi(C))$; c'est un élément de $S_d^{-1}\mathbf{Z}[M]$.

Définissons un *polyèdre convexe entier P* comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, et de points de M; la fonction caractéristique de P est $\varphi(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$. Nous verrons en 2.2 que $\varphi(P) \in \mathscr{L}_d(M)$, et que sa somme $\mathscr{S}(\varphi(P)) = \Phi(P)$ s'exprime à l'aide des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P.

2. Identités entre fonctions caractéristiques

2.1 Un propriété d'additivité

Définitions. Le *cône dual* d'un cône C de V est

$$\check{C} = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(x) \geqslant 0, \ \forall x \in C\} .$$

$\check{C}$ est un cône convexe polyédral de V^*, rationnel pour le réseau dual M^* de M. De plus, la codimension de $\check{C}$ est la dimension de $C \cap (-C)$, c'est-à-dire du plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C. En particulier, C est saillant si et seulement si $\check{C}$ est de dimension d.

Soit C un cône de V, et $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision de son cône dual σ; alors $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ où C_i est le cône dual de σ_i. Pour tout $i \in I$, on se donne $f_i \in M$ tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ quelle que soit la face σ_j de σ_i (on considère f_i comme fonction linéaire sur σ_i). Alors les f_i se recollent en une fonction continue sur σ, linéaire par morceaux, à valeurs entières sur $\sigma \cap M^*$. On dit que f est *convexe* si $f(a) + f(b) \leqslant f(a+b)$ pour tous a, b dans σ; cela signifie que pour tout $m \in V$, l'ensemble

$$A(m) = \{x \in \sigma \mid m(x) < f(x)\}$$

est vide ou convexe.

LEMME. *Soient C et f comme précédemment. Si f est convexe, alors pour tout $m \in V$:*

$$\sum_{i \in I,\, m \in f_i + C_i} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} 1 & si \quad m \in \bigcap_{i \in I} (f_i + C_i) \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

Démonstration (voisine de [D], p. 564]. On considère les groupes de cohomologie relative $H^n(\sigma, A(m))$ à coefficients rationnels. De la suite exacte longue

$$\cdots \to H^{n-1}\ (A(m)) \to H^n(\sigma, A(m)) \to H^n(\sigma) \mapsto H^n(A(m)) \to \cdots$$

et de la convexité de σ et de $A(m)$, il résulte que $H^n(\sigma, A(m)) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. De plus

$$0 \to H^0(\sigma, A(m)) \to H^0(\sigma) \xrightarrow{i} H^0(A(m)) \to H^1(\sigma, A(m)) \to 0$$

et i est surjective, donc $H^1(\sigma, A(m)) = 0$. Enfin

$$H^0(\sigma, A(m)) \neq 0 \Leftrightarrow A(m) = \varnothing \Leftrightarrow m \geqslant f \text{ sur } \sigma \Leftrightarrow m \in f + C$$

et

$$H^0(\sigma, A(m)) = \mathbf{Q}$$

dans ce cas. De même, $H^n(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et tout $i \in I$. Par suite, d'après le théorème de Leray (voir [G], corollaire au théorème 5.2.4) appliqué au recouvrement fermé $\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, le groupe $H^n(\sigma, A(m))$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe

(2) $$\cdots \to \bigoplus_{\dim(\sigma) = n} H^0(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i) \to \cdots$$

Puisque $H^0(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i)$ est égal à $\mathbf{Q}$ si $m \in f_i + C_i$, et à 0 sinon, l'identité cherchée s'obtient en calculant la caractéristique d'Euler du complexe (2). $\square$

THÉORÈME (Ishida). *Soient f et C comme précédemment. Si f est convexe, alors $\varphi(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)) \in \mathscr{L}_d(M)$, et*

$$\Phi\Big(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)\Big) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i + C_i)\ .$$

Démonstration. Montrons que

(3) $$\sum_{i \in I} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i + C_i) = \varphi\Big(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)\Big)\ .$$

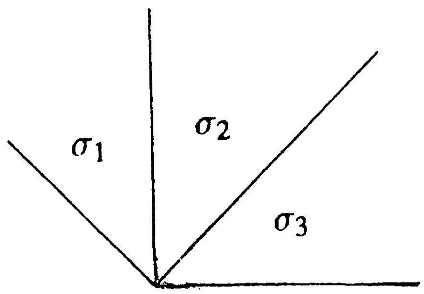
En effet, pour tout $m \in M$, les coefficients de x^m dans les deux membres de (3) sont égaux d'après le lemme. Pour conclure, on remarque que $\varphi(f_i + C_i) = x^{f_i}\varphi(C_i)$, et que $\mathscr{S}(\varphi(C_i)) = 0$ si C_i n'est pas saillant, c'est-à-dire si $\dim(\sigma_i) < d$. $\square$

En prenant $f = 0$, on obtient le

COROLLAIRE. *Pour tout cône C, et toute subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de son cône dual, on a*

$$\Phi(C) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(C_i)$$

où C_i est le cône dual de σ_i.



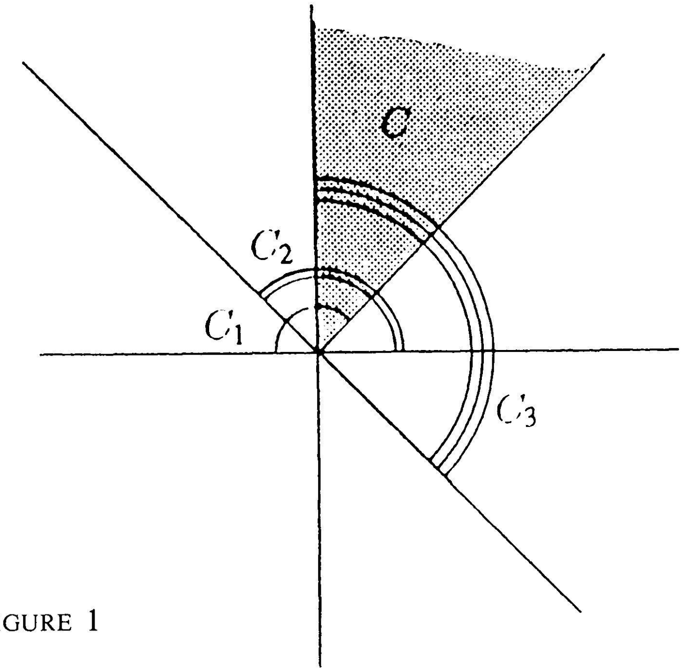


FIGURE 1

Une subdivision du cône dual

2.2. POLYÈDRES ET FONCTIONS D'APPUI

Afin de pouvoir appliquer le résultat qui précède aux fonctions caractéristiques des polyèdres, nous allons rappeler brièvement les liens entre les polyèdres convexes et leur fonction d'appui; pour plus de détails, voir [O], Appendix et [R], §§13 et 19.

Soit P un polyèdre convexe entier dans V; nous allons lui associer une subdivision d'un cône de V^*, et une fonction convexe en 2.1. Définissons la *fonction d'appui* de P par

$$f: V^* \to \{-\infty\} \cup \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \inf_{p \in P} x(p) .$$

Soit σ l'ensemble des $x \in V^*$ tels que $f(x) \neq -\infty$. C'est un cône, et $f(x) = \min_{s \in \mathscr{E}} x(s)$ pour tout $x \in \sigma$, où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets de P. Pour toute face F de P, on note P_F l'ensemble des $t(-f+p)$ où $f \in F$, $t \in \mathbf{R}_+$ et $p \in P$; c'est un cône, dont on note σ_F le cône dual. Remarquons que $P_F \cap (-P_F)$ est la direction du sous-espace affine engendré par F; en particulier, P_F est saillant si et seulement si F se réduit à un sommet. On vérifie sans peine que la famille des σ_F, F face de P, est une subdivision de σ, avec les $\sigma_s, s \in \mathscr{E}$, comme cônes de dimension maximale. De plus, $f \mid \sigma_s = s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$, et $P = \bigcap_{s \in \mathscr{E}} (s + P_s)$ si P ne contient aucune droite.

Réciproquement, soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision d'un cône σ de V^*. Pour tout $i \in I$, soit $f_i \in M$, tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ si σ_j est une face de σ_i. On suppose que la fonction f, obtenue par recollement des f_i, est *strictement convexe*, c'est-à-dire que $f(a) + f(b) < f(a+b)$ chaque fois que a, b appartiennent à des cônes distincts de la subdivision. Alors $P = \bigcap_{i \in I} (f_i + \check{\sigma}_i)$ est un polyèdre convexe entier, ayant pour sommets les f_i tels que la dimension de σ_i soit maximale, et pour fonction d'appui f. De 2.1 suit donc le

THÉORÈME. *Soient P un polyèdre convexe entier, et $\mathscr{E}$ l'ensemble de ses sommets. Alors*

$$\Phi(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(P_s)$$

où P_s est le cône engendré par $-s + P$.

2.3. Fonctions caractéristiques de polyèdres ouverts

Pour tout convexe C de V, on note $\mathring{C}$ son *intérieur relatif*, c'est-à-dire l'intérieur de C dans l'espace affine qu'il engendre.

THÉORÈME. *(i) Pour tout polyèdre convexe entier P, on a: $\varphi(\mathring{P}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et*

$$\Phi(\mathring{P}) = \sum_{s \in \mathscr{S}} x^s \Phi(\mathring{P}_s)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) Pour tout cône saillant C, on a: $\varphi(\mathring{C}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\mathring{C}) = (-1)^{\dim(C)} \Phi(-C)$$

où $-C$ est le cône opposé à C.

Démonstration. On peut supposer que P engendre V. On associe à P sa fonction d'appui f, et une subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de σ comme en 2.2. Supposons d'abord que P est borné; alors $\sigma = V^*$. Montrons que

$$\sum_{i \in I} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i - C_i) = (-1)^d \varphi(\overset{\circ}{P}) , \tag{4}$$

où on pose $C_i = \check{\sigma}_i$. Comme en 2.1, il suffit de montrer que

$$\sum_{i \in I, m \in f_i - C_i} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} (-1)^d & \text{si} \quad m \in \overset{\circ}{P} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases} \tag{5}$$

On pose $B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) > f(x)\}$ et on considère les groupes de cohomologie $H^n(V^*, B(m))$. Puisque f est linéaire sur chaque σ_i, l'ensemble $\sigma_i \cap B(m)$ est vide ou convexe, d'où comme en 2.1: $H^n(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, $H^n(V^*, B(m))$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe

$$\cdots \to \bigoplus_{\dim(\sigma_i) = n} H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) \to \cdots . \tag{6}$$

De plus, $H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i)$ est égal à $\mathbf{Q}$ si $m \leqslant f$ sur σ_i, c'est-à-dire si $m \in f_i - C_i$; et à 0 sinon. D'autre part, on a:

$$H^n(V^*, B(m)) = H_c^{d-n}(V^* \backslash B(m))$$

par dualité d'Alexander. De plus, puisque $V^* \backslash B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) \leqslant f(x)\}$ est un cône convexe fermé de V^*, on a: $H_c^i(V^* \backslash B(m)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$, sauf si $V^* \backslash B(m) = \{0\}$ et $i = 0$. D'où $H^n(V^*, B(m)) = 0$ sauf si $n = d$ et $m(x) > f(x)$ pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire si $m \in \overset{\circ}{P}$. Finalement, la caractéristique d'Euler du complexe (6) est $(-1)^d$ si $m \in \overset{\circ}{P}$, et 0 sinon, d'où (5).

Lorsque P n'est plus supposé borné, mais ne contient aucune droite, on peut trouver $x \in V^*$ tel que le polyèdre convexe $P_t = \{p \in P \mid x(p) \leqslant t\}$ soit borné, et d'intérieur non vide, pour tout t assez grand. De plus, P_t est entier pour une infinité de valeurs positives de t. En écrivant l'identité (4) pour P_t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient (4) pour P. En sommant les séries, on en déduit que

$$(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i - C_i) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(-P_s) .$$

En particulier, si $P = C$ est un cône saillant, alors $\mathscr{E} = \{0\}$ et $(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{C}) = \Phi(-C)$ d'où (ii). L'assertion (i) s'en déduit aussitôt, si P ne contient aucune droite. Mais si P contient une droite, alors $\mathring{P} = m + \mathring{P}$ pour un $m \in M$, d'où $\Phi(\mathring{P}) = 0$. D'autre part, P n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas. □

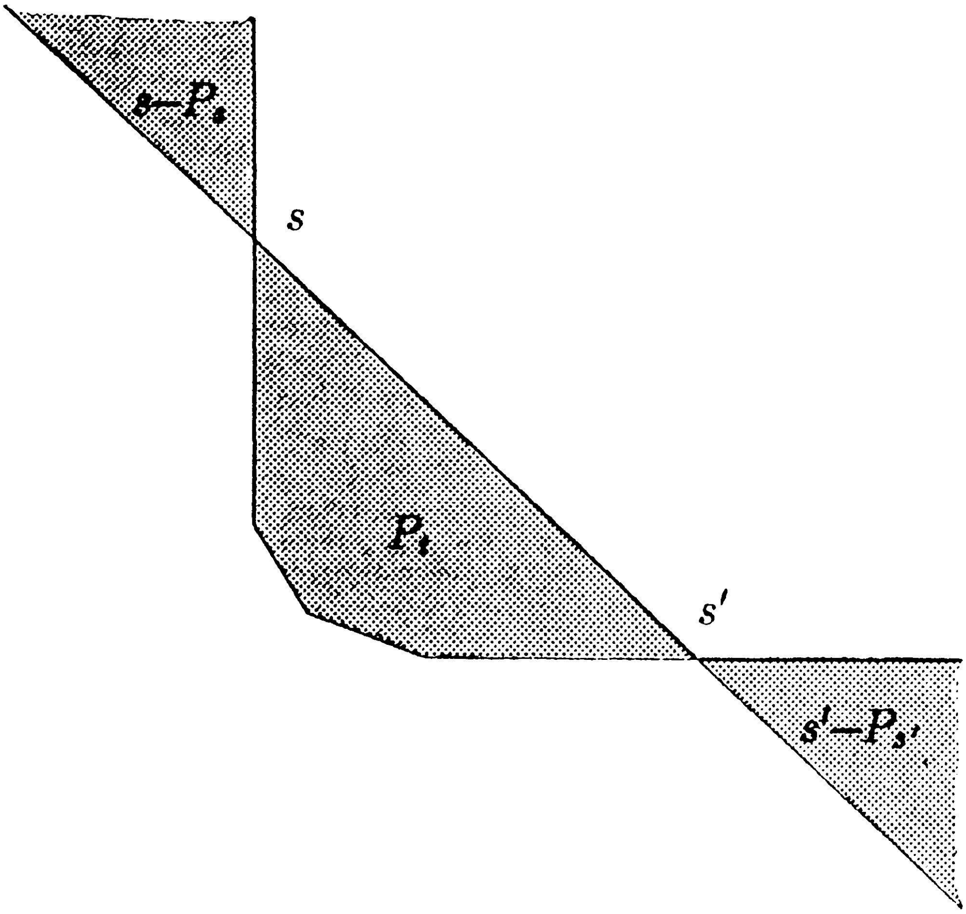


FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

COROLLAIRE. *Pour tout cône* C, *et toute subdivision* $(\sigma_i)_{i \in I}$ *de son cône dual, on a*

$$\Phi(\mathring{C}) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(\mathring{C}_i) ,$$

où C_i *est le cône dual de* σ_i.

2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

Définition. Un *poids* ω est la donnée, pour tout $m \in V$ et tout cône C, d'un nombre réel $\omega(m, C)$, tel que

$\omega(m, C) = 0$ si $x \notin C$;

$\omega(m, C)$ ne dépend que de la face de m dans C;

$\omega(-m, -C) = \omega(m, C)$.

Si F est une face de C, on pose $\omega(F, C) = \omega(m, C)$ où m est un point quelconque de $\overset{\circ}{F}$.

Pour tout poids ω, on définit son poids *dual* ω^* par

$$\omega^*(m, C) = \sum_{m \in F} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega(F, C)$$

(somme sur toutes les faces de C qui contiennent m).

PROPOSITION. *Pour tout poids* ω, *on a:* $\omega^{**} = \omega$.

Démonstration. Soit $m \in C$; alors

$$\begin{aligned} \omega^{**}(m, C) &= \sum_{m \in F} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega^*(F, C) \\ &= \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F) + \operatorname{codim}(F')} \omega(F', C) . \end{aligned}$$

Mais pour toute face F' de C, on a

$$(7) \qquad \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} = \begin{cases} (-1)^{\operatorname{codim}(F')} & \text{si } F' \text{ est la face de } m \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

en effet, grâce au théorème 2.3(ii):

$$\begin{aligned} \sum_{F \subset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \Phi(F) = (-1)^d \sum_{F \subset F'} \Phi(-\overset{\circ}{F}) &= (-1)^d \Phi(-F') \\ &= (-1)^{\operatorname{codim}(F')} \Phi(\overset{\circ}{F}{}') , \end{aligned}$$

d'où (7) . Par suite, on a $\omega^{**}(m, C) = \omega(F', C)$ où F' est la face de m.

Exemples.

(i) Soit χ le poids défini par $\chi(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in C \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

Alors

$$\chi^*(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \overset{\circ}{C} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(ii) On suppose V euclidien. Notons $S(m, \varepsilon)$ la sphère de centre m, de rayon $\varepsilon > 0$. Pour ε assez petit, le rapport $\mu(S(m, \varepsilon) \cap C)/\mu(S(m, \varepsilon))$ (où μ est la mesure de Lebesgue sur $S(m, \varepsilon)$) ne dépend pas de ε; notons-le $\alpha(m, C)$. Ce nombre mesure l'angle sous lequel on voit C depuis la face de m. D'après un résultat de Brianchon et Gram (voir [PS]) on a

$$\alpha^* = \alpha .$$

Soit ω un poids. Pour tout polyèdre convexe P, et tout $m \in V$, on pose $\omega(m, P) = \omega(0, P_F)$ où F est la face de m dans P, et P_F est le cône formé des $t(-f+p), f \in F, t \in \mathbf{R}_+, p \in P$ (voir 2.2). On définit

$$\varphi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m \in \mathbf{R}[[M]] .$$

Alors $\varphi_\chi = \varphi$ où χ est comme dans l'exemple (i). De plus, pour tout poids ω, on a

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F})$$

(somme sur toutes les faces F de P). Donc $\varphi_\omega(P) \in \mathscr{L}_d(M)$ d'après 2.3. On pose $\Phi_\omega(P) = \mathscr{S}(\varphi_\omega(P))$.

THÉORÈME. (i) *Pour tout polyèdre convexe entier P, on a*

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi_\omega(P_s) ,$$

où $\mathscr{E}$ est l'ensemble de sommets de P, et P_s est le cône engendré par $-s+P$.

(ii) *Pour tout cône C, on a*

$$\Phi_\omega(C) = (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega *}(-C) .$$

Démonstration. (i) On a, d'après le théorème 2.3,

$$\Phi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P)\, \Phi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F \omega(F, P) \sum_{s \in \mathscr{E}_F} \Phi(\overset{\circ}{F}_s) ,$$

où $\mathscr{E}_F$ est l'ensemble des sommets de la face F. D'où

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \Big(\sum_{F \ni s} \omega(F, P)\, \Phi(\overset{\circ}{F}_s)\Big) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi_\omega(P_s) .$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned}
\Phi_\omega(C) &= \sum_F \omega(F, C) \Phi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \Phi(-F) \\
&= \sum_{F' \subset F} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \Phi(-\overset{\circ}{F'}) \\
&= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \Big(\sum_{F \supset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega(F, C)\Big) \Phi(-\overset{\circ}{F'}) \\
&= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \omega^*(F', C) \Phi(-\overset{\circ}{F'}) \\
&= (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega *}(-C) . \qquad \square
\end{aligned}$$