2.2. Polyèdres et fonctions d'appui

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

En effet, pour tout $m \in M$, les coefficients de x^m dans les deux membres de (3) sont égaux d'après le lemme. Pour conclure, on remarque que $\varphi(f_i + C_i) = x^{f_i}\varphi(C_i)$, et que $\mathscr{S}(\varphi(C_i)) = 0$ si C_i n'est pas saillant, c'est-à-dire si $\dim(\sigma_i) < d$. $\square$

En prenant $f = 0$, on obtient le

Corollaire. *Pour tout cône C, et toute subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de son cône dual, on a*

$$\Phi(C) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(C_i)$$

où C_i est le cône dual de σ_i.

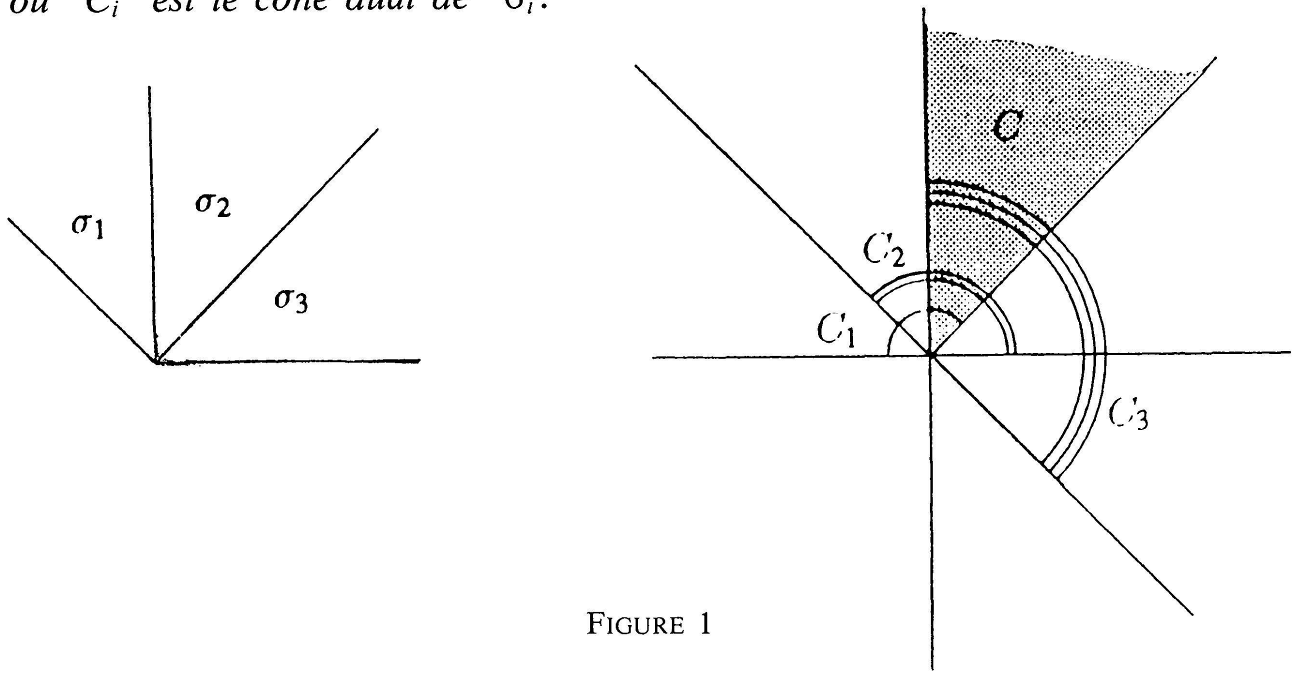

Figure 1

Une subdivision du cône dual

2.2. Polyèdres et fonctions d'appui

Afin de pouvoir appliquer le résultat qui précède aux fonctions caractéristiques des polyèdres, nous allons rappeler brièvement les liens entre les polyèdres convexes et leur fonction d'appui; pour plus de détails, voir [O], Appendix et [R], §§13 et 19.

Soit P un polyèdre convexe entier dans V; nous allons lui associer une subdivision d'un cône de V^*, et une fonction convexe en 2.1. Définissons la *fonction d'appui* de P par

$$\begin{aligned} f : V^* &\to \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \\ x &\mapsto \inf_{p \in P} \ x(p)\,. \end{aligned}$$

Soit σ l'ensemble des $x \in V^*$ tels que $f(x) \neq -\infty$. C'est un cône, et $f(x) = \min_{s \in \mathscr{E}} x(s)$ pour tout $x \in \sigma$, où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets de P. Pour toute face F de P, on note P_F l'ensemble des $t(-f+p)$ où $f \in F$, $t \in \mathbf{R}_+$ et $p \in P$; c'est un cône, dont on note σ_F le cône dual. Remarquons que $P_F \cap (-P_F)$ est la direction du sous-espace affine engendré par F; en particulier, P_F est saillant si et seulement si F se réduit à un sommet. On vérifie sans peine que la famille des σ_F, F face de P, est une subdivision de σ, avec les $\sigma_s, s \in \mathscr{E}$, comme cônes de dimension maximale. De plus, $f \mid \sigma_s = s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$, et $P = \bigcap_{s \in \mathscr{E}} (s + P_s)$ si P ne contient aucune droite.

Réciproquement, soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision d'un cône σ de V^*. Pour tout $i \in I$, soit $f_i \in M$, tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ si σ_j est une face de σ_i. On suppose que la fonction f, obtenue par recollement des f_i, est *strictement convexe,* c'est-à-dire que $f(a) + f(b) < f(a+b)$ chaque fois que a, b appartiennent à des cônes distincts de la subdivision. Alors $P = \bigcap_{i \in I} (f_i + \check{\sigma}_i)$ est un polyèdre convexe entier, ayant pour sommets les f_i tels que la dimension de σ_i soit maximale, et pour fonction d'appui f. De 2.1 suit donc le

THÉORÈME. *Soient P un polyèdre convexe entier, et $\mathscr{E}$ l'ensemble de ses sommets. Alors*

$$\Phi(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(P_s)$$

où P_s est le cône engendré par $-s+P$.

2.3. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE POLYÈDRES OUVERTS

Pour tout convexe C de V, on note $\mathring{C}$ son *intérieur relatif*, c'est-à-dire l'intérieur de C dans l'espace affine qu'il engendre.

THÉORÈME. *(i) Pour tout polyèdre convexe entier P, on a: $\varphi(\mathring{P}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et*

$$\Phi(\mathring{P}) = \sum_{s \in \mathscr{S}} x^s \Phi(\mathring{P}_s)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) Pour tout cône saillant C, on a: $\varphi(\mathring{C}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\mathring{C}) = (-1)^{\dim(C)} \Phi(-C)$$

où $-C$ est le cône opposé à C.