

## 2.4. Fonctions caractéristiques pondérées

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

droite. Mais si  $P$  contient une droite, alors  $\overset{\circ}{P} = m + \overset{\circ}{P}$  pour un  $m \in M$ , d'où  $\Phi(\overset{\circ}{P}) = 0$ . D'autre part,  $P$  n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas.  $\square$

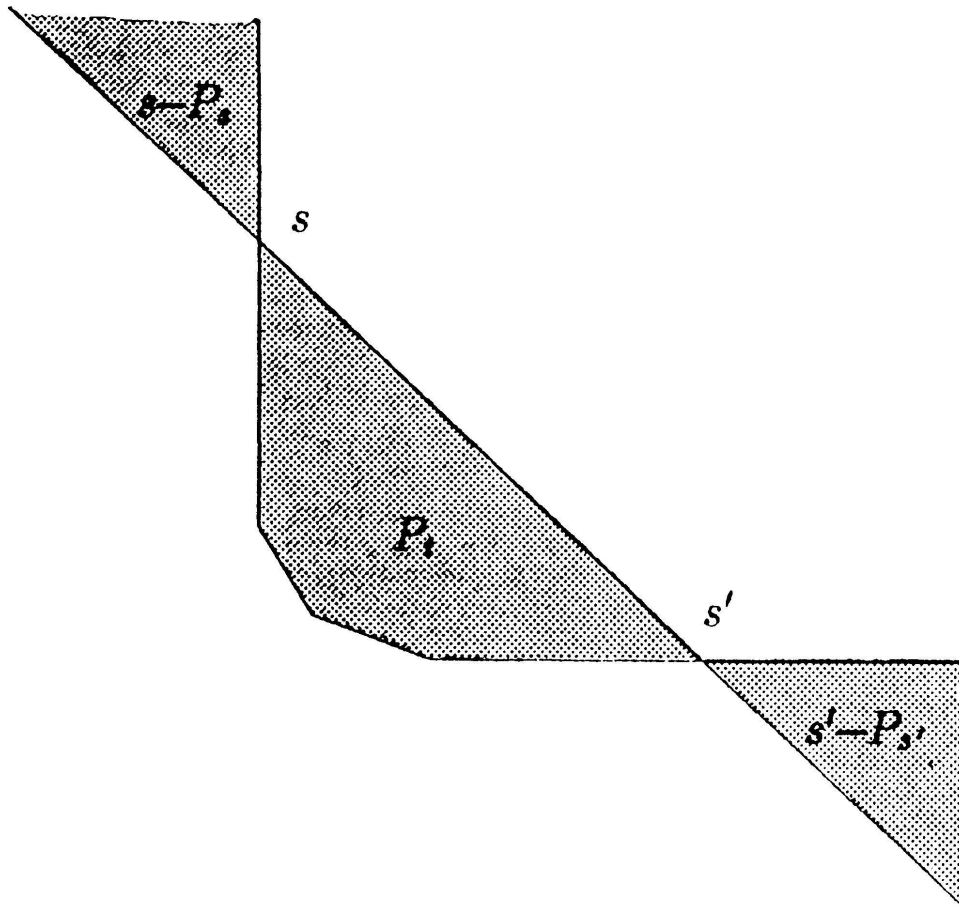


FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

COROLLAIRE. *Pour tout cône  $C$ , et toute subdivision  $(\sigma_i)_{i \in I}$  de son cône dual, on a*

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(\overset{\circ}{C}_i),$$

où  $C_i$  est le cône dual de  $\sigma_i$ .

#### 2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

*Définition.* Un poids  $\omega$  est la donnée, pour tout  $m \in V$  et tout cône  $C$ , d'un nombre réel  $\omega(m, C)$ , tel que

$$\omega(m, C) = 0 \text{ si } x \notin C;$$

$$\omega(m, C) \text{ ne dépend que de la face de } m \text{ dans } C;$$

$$\omega(-m, -C) = \omega(m, C).$$

Si  $F$  est une face de  $C$ , on pose  $\omega(F, C) = \omega(m, C)$  où  $m$  est un point quelconque de  $\overset{\circ}{F}$ .

Pour tout poids  $\omega$ , on définit son poids *dual*  $\omega^*$  par

$$\omega^*(m, C) = \sum_{m \in F} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega(F, C)$$

(somme sur toutes les faces de  $C$  qui contiennent  $m$ ).

PROPOSITION. *Pour tout poids  $\omega$ , on a:  $\omega^{**} = \omega$ .*

*Démonstration.* Soit  $m \in C$ ; alors

$$\begin{aligned} \omega^{**}(m, C) &= \sum_{m \in F} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega^*(F, C) \\ &= \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F) + \text{codim}(F')} \omega(F', C). \end{aligned}$$

Mais pour toute face  $F'$  de  $C$ , on a

$$(7) \quad \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} = \begin{cases} (-1)^{\text{codim}(F')} & \text{si } F' \text{ est la face de } m \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

en effet, grâce au théorème 2.3(ii):

$$\begin{aligned} \sum_{F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} \Phi(F) &= (-1)^d \sum_{F \subset F'} \Phi(-\overset{\circ}{F}) = (-1)^d \Phi(-F') \\ &= (-1)^{\text{codim}(F')} \Phi(\overset{\circ}{F'}), \end{aligned}$$

d'où (7). Par suite, on a  $\omega^{**}(m, C) = \omega(F', C)$  où  $F'$  est la face de  $m$ .

*Exemples.*

$$(i) \quad \text{Soit } \chi \text{ le poids défini par } \chi(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in C \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Alors

$$\chi^*(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \overset{\circ}{C} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(ii) On suppose  $V$  euclidien. Notons  $S(m, \varepsilon)$  la sphère de centre  $m$ , de rayon  $\varepsilon > 0$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, le rapport  $\mu(S(m, \varepsilon) \cap C) / \mu(S(m, \varepsilon))$  (où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $S(m, \varepsilon)$ ) ne dépend pas de  $\varepsilon$ ; notons-le  $\alpha(m, C)$ . Ce nombre mesure l'angle sous lequel on voit  $C$  depuis la face de  $m$ . D'après un résultat de Brianchon et Gram (voir [PS]) on a

$$\alpha^* = \alpha .$$

Soit  $\omega$  un poids. Pour tout polyèdre convexe  $P$ , et tout  $m \in V$ , on pose  $\omega(m, P) = \omega(0, P_F)$  où  $F$  est la face de  $m$  dans  $P$ , et  $P_F$  est le cône formé des  $t(-f + p)$ ,  $f \in F$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $p \in P$  (voir 2.2). On définit

$$\varphi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m \in \mathbf{R}[[M]] .$$

Alors  $\varphi_\chi = \varphi$  où  $\chi$  est comme dans l'exemple (i). De plus, pour tout poids  $\omega$ , on a

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F})$$

(somme sur toutes les faces  $F$  de  $P$ ). Donc  $\varphi_\omega(P) \in \mathcal{L}_d(M)$  d'après 2.3. On pose  $\Phi_\omega(P) = \mathcal{S}(\varphi_\omega(P))$ .

THÉORÈME. (i) *Pour tout polyèdre convexe entier  $P$ , on a*

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \Phi_\omega(P_s) ,$$

où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble de sommets de  $P$ , et  $P_s$  est le cône engendré par  $-s + P$ .

(ii) *Pour tout cône  $C$ , on a*

$$\Phi_\omega(C) = (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega^*}(-C) .$$

*Démonstration.* (i) On a, d'après le théorème 2.3,

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F \omega(F, P) \sum_{s \in \mathcal{E}_F} \varphi(\overset{\circ}{F}_s) ,$$

où  $\mathcal{E}_F$  est l'ensemble des sommets de la face  $F$ . D'où

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( \sum_{F \ni s} \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F}_s) \right) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \Phi_\omega(P_s) .$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(C) &= \sum_F \omega(F, C) \varphi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \varphi(-F) \\ &= \sum_{F' \subset F} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \varphi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \left( \sum_{F \supset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega(F, C) \right) \varphi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \omega^*(F', C) \varphi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega^*}(-C) . \quad \square \end{aligned}$$