

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Kapitel: 3.1. Comportement polynomial de fonctions de comptage
Autor: Brion, Michel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59483>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3. PROPRIÉTÉS ÉNUMÉRATIVES DES POLYTOPES CONVEXES ENTIERS

3.1. COMPORTEMENT POLYNOMIAL DE FONCTIONS DE COMPTAGE

Soient P un polytope convexe entier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M , et ω un poids (voir 2.4). Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP),$$

où $nP = \{np \mid p \in P\}$.

THÉORÈME. *La fonction $i_{\omega, P}$ se prolonge en une fonction polynomiale sur \mathbf{R} , de degré au plus d .*

Démonstration. Soit \mathcal{E} l'ensemble des sommets de P . Pour tout $s \in \mathcal{E}$, soit P_s le cône engendré par $-s + P$. Alors l'ensemble des sommets de nP est $n\mathcal{E}$, et on a: $(nP)_{ns} = P_s$ pour tout $s \in \mathcal{E}$. D'après le théorème 2.4, on a:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) x^m = \Phi_{\omega}(nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega}(P_s).$$

De plus, chaque $\Phi_{\omega}(P_s)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de termes de la forme $x^q \prod_{i=1}^n (1 - x^{m_i})^{-1}$ où $n \leq d$. Choisissons une forme

linéaire λ sur V , telle que $\lambda(m_i) \neq 0$ chaque fois que $1 - x^{m_i}$ figure au dénominateur d'un des $\Phi_{\omega}(P_s)$. Soit $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\varepsilon: \mathbf{Z}[M] \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\varepsilon(x^m) = \exp(t\lambda(m))$, où \exp est la fonction exponentielle. Par hypothèse, ε s'étend à l'algèbre engendrée par $\mathbf{Z}[M]$ et les $\Phi_{\omega}(P_s)$. D'où la relation

$$(8) \quad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(tn\lambda(s)) \cdot \varepsilon(\Phi_{\omega}(P_s)).$$

De plus, $\varepsilon(\Phi_{\omega}(P_s))$ est une combinaison linéaire de termes

$$\exp(t\lambda(a)) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - \exp(t\lambda(m_i)))^{-1},$$

donc son développement en série de Laurent en t , est de la forme

$$\varepsilon(\Phi_{\omega}(P_s)) = \sum_{q = -r_s}^{+\infty} a_q(s) t^q,$$

avec $r_s \leq d$. En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en t , on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p,$$

d'où le résultat. \square

On note encore $i_{\omega, P}$ la fonction polynomiale ainsi définie. En général, $i_{\omega, P}(0)$ n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

3.2. LOI DE RÉCIPROCITÉ

On conserve les notations de 3.1. Soit ω^* le poids dual de ω (voir 2.4).

THÉORÈME. *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t).$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(nP) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega}(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s) \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$(9) \quad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(tn\lambda(s)) \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)).$$

Soit $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$ son développement en série de Laurent.

En remplaçant t par $-t$ dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q.$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1. \square