Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX

Kapitel: 3.1. Comportement polynomial de fonctions de comptage

Autor: Brion, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

3. Propriétés énumératives des polytopes convexes entiers

3.1. Comportement polynomial de fonctions de comptage

Soient P un polytope convexe entier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M, et ω un poids (voir 2.4). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) ,$$

où $nP = \{np \mid p \in P\}$.

THÉORÈME. *La fonction* $i_{\omega,P}$ *se prolonge en une fonction polynomiale sur* $\mathbf{R}$, *de degré au plus* d.

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sommets de P. Pour tout $s \in \mathscr{E}$, soit P_s le cône engendré par $-s+P$. Alors l'ensemble des sommets de nP est $n\mathscr{E}$, et on a: $(nP)_{ns} = P_s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$. D'après le théorème 2.4, on a:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) x^m = \Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) .$$

De plus, chaque $\Phi_\omega(P_s)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de termes de la forme $x^q \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i})^{-1}$ où $n \leqslant d$. Choisissons une forme linéaire λ sur V, telle que $\lambda(m_i) \neq 0$ chaque fois que $1 - x^{m_i}$ figure au dénominateur d'un des $\Phi_\omega(P_s)$. Soit $t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\varepsilon\colon \mathbf{Z}[M] \to \mathbf{R}$ tel que $\varepsilon(x^m) = \exp(t\lambda(m))$, où exp est la fonction exponentielle. Par hypothèse, ε s'étend à l'algèbre engendrée par $\mathbf{Z}[M]$ et les $\Phi_\omega(P_s)$. D'où la relation

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s)) \cdot \varepsilon(\Phi_\omega(P_s)) . \tag{8}$$

De plus, $\varepsilon(\Phi_\omega(P_s))$ est une combinaison linéaire de termes

$$\exp(t\lambda(a)) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - \exp(t\lambda(m_i))^{-1} ,$$

donc son développement en série de Laurent en t, est de la forme

$$\varepsilon(\Phi_\omega(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q(s) t^q ,$$

avec $r_s \leqslant d$. En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en t, on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p ,$$

d'où le résultat. □

On note encore $i_{\omega, P}$ la fonction polynomiale ainsi définie. En général, $i_{\omega, P}(0)$ n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

3.2. Loi de réciprocité

On conserve les notations de 3.1. Soit ω^* le poids dual de ω (voir 2.4).

THÉORÈME. *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t) .$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned}\Phi_\omega(nP) &= \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s)\end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s))\, \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)) . \tag{9}$$

Soit $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$ son développement en série de Laurent. En remplaçant t par $-t$ dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q .$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1. □