

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYÈDRES ET RÉSEAUX  
**Kapitel:** 3.2. Loi de réciprocité  
**Autor:** Brion, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59483>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

avec  $r_s \leq d$ . En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en  $t$ , on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p,$$

d'où le résultat.  $\square$

On note encore  $i_{\omega, P}$  la fonction polynomiale ainsi définie. En général,  $i_{\omega, P}(0)$  n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

### 3.2. LOI DE RÉCIPROCITÉ

On conserve les notations de 3.1. Soit  $\omega^*$  le poids dual de  $\omega$  (voir 2.4).

**THÉORÈME.** *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t).$$

*Démonstration.* On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(nP) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega}(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s) \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$(9) \quad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(tn\lambda(s)) \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)).$$

Soit  $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$  son développement en série de Laurent.

En remplaçant  $t$  par  $-t$  dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q.$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1.  $\square$

En prenant pour poids la fonction  $\chi$  définie dans l'exemple 2.4.(i), on retrouve le résultat suivant (voir [E], §6):

COROLLAIRE 1. Soient  $i_P(n) = \text{card}(((nP) \cap M))$  et  $i_P^\circ(n) = \text{card}((nP) \cap M)$ . Alors les fonctions  $i_P$  et  $i_P^\circ$  sont polynomiales, et on a  $i_P(-t) = (-1)^d i_P^\circ(t)$ .

Lorsqu'on prend pour poids la fonction  $\alpha$  définie dans l'exemple 2.4(ii), on a  $\alpha = \alpha^*$ , d'où le

COROLLAIRE 2 (voir [M], Theorem 4.8). La fonction

$$i_{\alpha, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \alpha(m, nP)$$

est polynomiale, et  $i_{\alpha, P}(-t) = (-1)^d i_{\alpha, P}(t)$ .

Les fonctions  $i_{\alpha, P}$  ont été introduites par H. Hadwiger pour caractériser l'équivalence de deux polytopes par décompositions et translations entières (voir [H], 2.2.9).

Revenons au cas général. Pour toute face  $F$  de  $P$ , l'espace affine  $\langle F \rangle$  qu'elle engendre, est muni d'une mesure canonique  $\mu$ : la mesure de Lebesgue normalisée de façon que la maille unité du réseau  $M \cap \langle F \rangle$  soit de mesure 1.

COROLLAIRE 3. Pour tout poids  $\omega$ , le coefficient de  $t^d$  dans  $i_{\omega, P}(t)$  est  $\overset{\circ}{\omega} \mu(P)$ , où  $\overset{\circ}{\omega} = \omega(x, P)$  pour tout  $x \in \overset{\circ}{P}$ . Le coefficient de  $t^{d-1}$  dans  $i_{\omega, P}(t)$  est

$$\sum_{\text{codim}(F) = 1} (\omega(F, P) - \overset{\circ}{\omega}/2) \mu(F).$$

Enfin, le terme constant de  $i_{\omega, P}(t)$  est  $\sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P)$ .

*Démonstration.* On a

$$i_{\omega, P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n).$$

De plus, puisque

$$i_F^\circ(n) \cdot n^{-\dim(F)} = n^{-\dim(F)} \sum_{m \in \overset{\circ}{F} \cap (1/n)M} 1$$

est une somme de Riemann pour l'intégrale  $\int_F d\mu$ , on a

$$i_F^\circ(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{\dim(F)} \mu(F),$$

d'où la première assertion. Montrons d'abord la deuxième assertion lorsque  $\omega = \chi$ . Alors

$$\begin{aligned} i_P(n) - \text{card}((n\partial P) \cap M) &= \text{card}((nP) \cap M) - \text{card}((n\partial P) \cap M) \\ &= i_P^\circ(n) = (-1)^d i_P(-n), \end{aligned}$$

où  $\partial P$  désigne le bord de  $P$ . Donc, si  $a$  est le coefficient de  $n^{d-1}$  dans  $i_P(n)$ ,

$$a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F) = (-1)^d (-1)^{d-1} a,$$

d'où  $a = \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F)/2$ . Dans le cas général, puisque

$$\begin{aligned} i_{\omega, P}(n) &= \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n) \\ &+ \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n), \end{aligned}$$

le coefficient de  $n^{d-1}$  dans  $i_{\omega, P}(n)$  est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \omega(F, P) \mu(F).$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où  $\omega = \chi$ ; il faut montrer que  $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$ . Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathcal{C}} \Phi(P_s) = 1.$$

En effet, les  $\check{P}_s$  sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de  $V^*$  (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique.  $\square$

### 3.3. LE CAS D'UN POLYTOPE RATIONNEL

Dans cette section, on considère un polytope convexe  $P$  dans  $V$ , rationnel par rapport au réseau  $M$ : pour tout sommet  $s$  de  $P$ , il existe un entier  $n_s > 0$  tel que  $n_s \cdot s \in M$ . On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit  $\omega$  un poids; posons  $i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$ . Notons  $\tilde{M}$  le réseau engendré par  $M$  et les sommets de  $P$ . Soit  $\gamma$  le plus petit entier positif tel que  $\gamma \cdot s \in M$  pour tout sommet  $s$  de  $P$  (c'est l'exposant du groupe abélien fini  $\tilde{M}/M$ ).

**THÉORÈME.** *Il existe des fonctions polynomiales  $i_{\omega, P}^{(1)}, \dots, i_{\omega, P}^{(\gamma)}$  sur  $\mathbf{R}$ , telles que  $i_{\omega, P}(n) = i_{\omega, P}^{(r)}(n)$  si  $n \equiv r \pmod{\gamma}$ . De plus, on a*

$$i_{\omega, P}^{(r)}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}^{(\gamma-r)}(-t)$$

pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .