Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Kapitel: 3.3. Le cas d'un polytope rationnel
Autor: Brion, Michel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

$$i_P(n) - \operatorname{card}((n\partial P) \cap M) = \operatorname{card}((nP) \cap M) - \operatorname{card}((n\partial P) \cap M)$$
$$= i_P^{\circ}(n) = (-1)^d i_P(-n) \,,$$

où ∂P désigne le bord de P. Donc, si a est le coefficient de n^{d-1} dans $i_P(n)$,

$$a - \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \mu(F) = (-1)^d(-1)^{d-1}a \,,$$

d'où $a = \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \mu(F)/2$. Dans le cas général, puisque

$$i_{\omega, P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^{\circ}(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n)$$
$$+ \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n) \,,$$

le coefficient de n^{d-1} dans $i_{\omega, P}(n)$ est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \omega(F, P) \mu(F) \,.$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où $\omega = \chi$; il faut montrer que $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$. Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi(P_s) = 1 \,.$$

En effet, les $\check{P}_s$ sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de V^* (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique. □

3.3. LE CAS D'UN POLYTOPE RATIONNEL

Dans cette section, on considère un polytope convexe P dans V, rationnel par rapport au réseau M: pour tout sommet s de P, il existe un entier $n_s > 0$ tel que $n_s \cdot s \in M$. On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit ω un poids; posons $i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$. Notons $\tilde{M}$ le réseau engendré par M et les sommets de P. Soit γ le plus petit entier positif tel que $\gamma \cdot s \in M$ pour tout sommet s de P (c'est l'exposant du groupe abélien fini $\tilde{M}/M$).

THÉORÈME. *Il existe des fonctions polynomiales* $i_{\omega, P}^{(1)}, \ldots, i_{\omega, P}^{(\gamma)}$ *sur* $\mathbf{R}$, *telles que* $i_{\omega, P}(n) = i_{\omega, P}^{(r)}(n)$ *si* $n \equiv r \pmod{\gamma}$. *De plus, on a*

$$i_{\omega, P}^{(r)}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}^{(\gamma - r)}(-t)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Soit $\pi : \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$ l'application définie par

$$\pi\Big(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\Big) = \sum_{p \in M} a_p x^p \, .$$

C'est un morphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules. Soit $\tilde{S}$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^p, p \in \tilde{M}\backslash\{0\}$; et soit $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ engendré par $\tilde{S}^{-1}$ et $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\gamma - 1} x^{np} \right) ,$$

résulte que $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Par suite, π s'étend en un unique morphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules, noté encore $\pi : \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On a donc, en posant

$$\tilde{\Phi}_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m :$$

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{C}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) \, .$$

De plus, puisque chaque P_s est rationnel pour le réseau M, on a: $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Soit $n > 0$ un entier; écrivons $n = q\gamma + r$ où q est entier, et où $1 \leqslant r \leqslant \gamma$. Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathscr{C}} \pi(x^{ns}\tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathscr{C}} x^{q\gamma s}\pi(x^{rs}\tilde{\Phi}_\omega(P_s)) \, .$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2. □

RÉFÉRENCES

[B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 21* (1988), 653-663.

[D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 3* (1970), 507-588.

[E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math., 226* (1967), 1-29.

[G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1958.

[Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.

[Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes, *h*-vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.

[I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math. 1 (3)* (1990), 251-265.