

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYÈDRES ET RÉSEAUX  
**Kapitel:** 3.3. Le cas d'un polytope rationnel  
**Autor:** Brion, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59483>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\begin{aligned} i_P(n) - \text{card}((n\partial P) \cap M) &= \text{card}((nP) \cap M) - \text{card}((n\partial P) \cap M) \\ &= i_P^\circ(n) = (-1)^d i_P(-n), \end{aligned}$$

où  $\partial P$  désigne le bord de  $P$ . Donc, si  $a$  est le coefficient de  $n^{d-1}$  dans  $i_P(n)$ ,

$$a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F) = (-1)^d (-1)^{d-1} a,$$

d'où  $a = \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F)/2$ . Dans le cas général, puisque

$$\begin{aligned} i_{\omega, P}(n) &= \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n) \\ &+ \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n), \end{aligned}$$

le coefficient de  $n^{d-1}$  dans  $i_{\omega, P}(n)$  est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \omega(F, P) \mu(F).$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où  $\omega = \chi$ ; il faut montrer que  $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$ . Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathcal{C}} \Phi(P_s) = 1.$$

En effet, les  $\check{P}_s$  sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de  $V^*$  (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique.  $\square$

### 3.3. LE CAS D'UN POLYTOPE RATIONNEL

Dans cette section, on considère un polytope convexe  $P$  dans  $V$ , rationnel par rapport au réseau  $M$ : pour tout sommet  $s$  de  $P$ , il existe un entier  $n_s > 0$  tel que  $n_s \cdot s \in M$ . On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit  $\omega$  un poids; posons  $i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$ . Notons  $\tilde{M}$  le réseau engendré par  $M$  et les sommets de  $P$ . Soit  $\gamma$  le plus petit entier positif tel que  $\gamma \cdot s \in M$  pour tout sommet  $s$  de  $P$  (c'est l'exposant du groupe abélien fini  $\tilde{M}/M$ ).

**THÉORÈME.** *Il existe des fonctions polynomiales  $i_{\omega, P}^{(1)}, \dots, i_{\omega, P}^{(\gamma)}$  sur  $\mathbf{R}$ , telles que  $i_{\omega, P}(n) = i_{\omega, P}^{(r)}(n)$  si  $n \equiv r \pmod{\gamma}$ . De plus, on a*

$$i_{\omega, P}^{(r)}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}^{(\gamma-r)}(-t)$$

pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi: \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$  l'application définie par

$$\pi\left(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\right) = \sum_{p \in M} a_p x^p.$$

C'est un morphisme de  $\mathbf{Z}[M]$ -modules. Soit  $\tilde{S}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$  formé des produits finis d'éléments de la forme  $1 - x^p, p \in \tilde{M} \setminus \{0\}$ ; et soit  $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$  le sous-anneau du corps des fractions de  $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$  engendré par  $\tilde{S}^{-1}$  et  $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ . De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\gamma-1} x^{np} \right),$$

résulte que  $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ . Par suite,  $\pi$  s'étend en un unique morphisme de  $\mathbf{Z}[M]$ -modules, noté encore  $\pi: \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ . On a donc, en posant

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\omega(P) &= \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m : \\ \Phi_\omega(P) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)). \end{aligned}$$

De plus, puisque chaque  $P_s$  est rationnel pour le réseau  $M$ , on a:  $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ . Soit  $n > 0$  un entier; écrivons  $n = q\gamma + r$  où  $q$  est entier, et où  $1 \leq r \leq \gamma$ . Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^{ns} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{q\gamma s} \pi(x^{rs} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)).$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 21 (1988), 653-663.
- [D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 3 (1970), 507-588.
- [E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math.*, 226 (1967), 1-29.
- [G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.
- [Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.
- [Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes,  $h$ -vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.
- [I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math.* 1 (3) (1990), 251-265.