Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS

Autor: Baouche, A. / Dubuc, S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59484

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 89-94

LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS

par A. BAOUCHE et S. DUBUC

En 1872, Weierstrass [2] a donné un exemple d'une fonction nulle part dérivable à savoir: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x$. Les conditions données par Weierstrass sur les paramètres a et b pour que cette fonction soit continue, mais qu'elle ne possède en aucun endroit un quotient différentiel fini ou infini sont: $0 < a < 1, ab > 1 + 3\pi/2$, où b est un entier impair. Par la suite, plusieurs mathématiciens ont reconnu que des conditions plus générales laissent la fonction de Weierstrass sans dérivée. C'est Hardy [1] qui a mené la meilleure analyse de la fonction de Weierstrass. Il a démontré que chacune des fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n x$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin b^n x$ ne possède nulle part un quotient différentiel fini pour $0 < a < 1$ et $ab \geqslant 1$. Cependant la démonstration de Hardy, bien qu'habile, profonde et exhaustive requiert beaucoup d'étapes. Notre objectif est d'exposer une démonstration beaucoup plus simple de l'inexistence de la dérivée de ces deux fonctions en tout point lorsque les deux conditions suivantes sont remplies: $0 < a < 1$ et $ab > 1$.

1. PROPRIÉTÉS DE LIPSCHITZ DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS

Nous citons le théorème principal de Hardy [1] qui entraîne la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass. Auparavant, désignons ainsi deux fonctions apparentées à la fonction de Weierstrass:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n x \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin b^n x \, .$$

THÉORÈME (Hardy [1]). *Supposons que* $0 < a < 1$ *et* $ab > 1$ *de sorte que* $\alpha = -\ln a / \ln b < 1$. *Alors chacune des fonctions* $f(x) = C(x)$ *ou* $S(x)$ *satisfait la condition* $f(x+h) - f(x) = O(|h|^{\alpha})$, *pour toute* *valeur de* x*; mais aucune de ces fonctions ne satisfait la condition* $f(x+h) - f(x) = o(|h|^{\alpha})$*, quelle que soit la valeur de* x.

Nous améliorons une partie du dernier énoncé.

THÉORÈME. *Avec les mêmes hypothèses, si* $f(x) = C(x)$ *ou* $S(x)$*, alors il existe une constante* $\varepsilon > 0$ *telle que, pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *et pour tout nombre* $\delta \in \,]0, 1[$*, il existe un nombre* t *voisin de* x *à* δ *près pour lequel* $|f(t) - f(x)| > \varepsilon\delta^{\alpha}$.

La figure 1 illustre le contenu du dernier théorème. On y trace le graphique de la fonction de Weierstrass $y = C(x)$ où $a = 1/2$ et $b = 7/2$ et de la relation $|y - y_0| = \varepsilon|x - x_0|^{\alpha}$. Dans ce cas-ci, $\alpha = 0{,}55$ et $\varepsilon = 0{,}52$; le point x_0 a été choisi comme $2\pi/3$ et $y_0 = C(x_0)$.

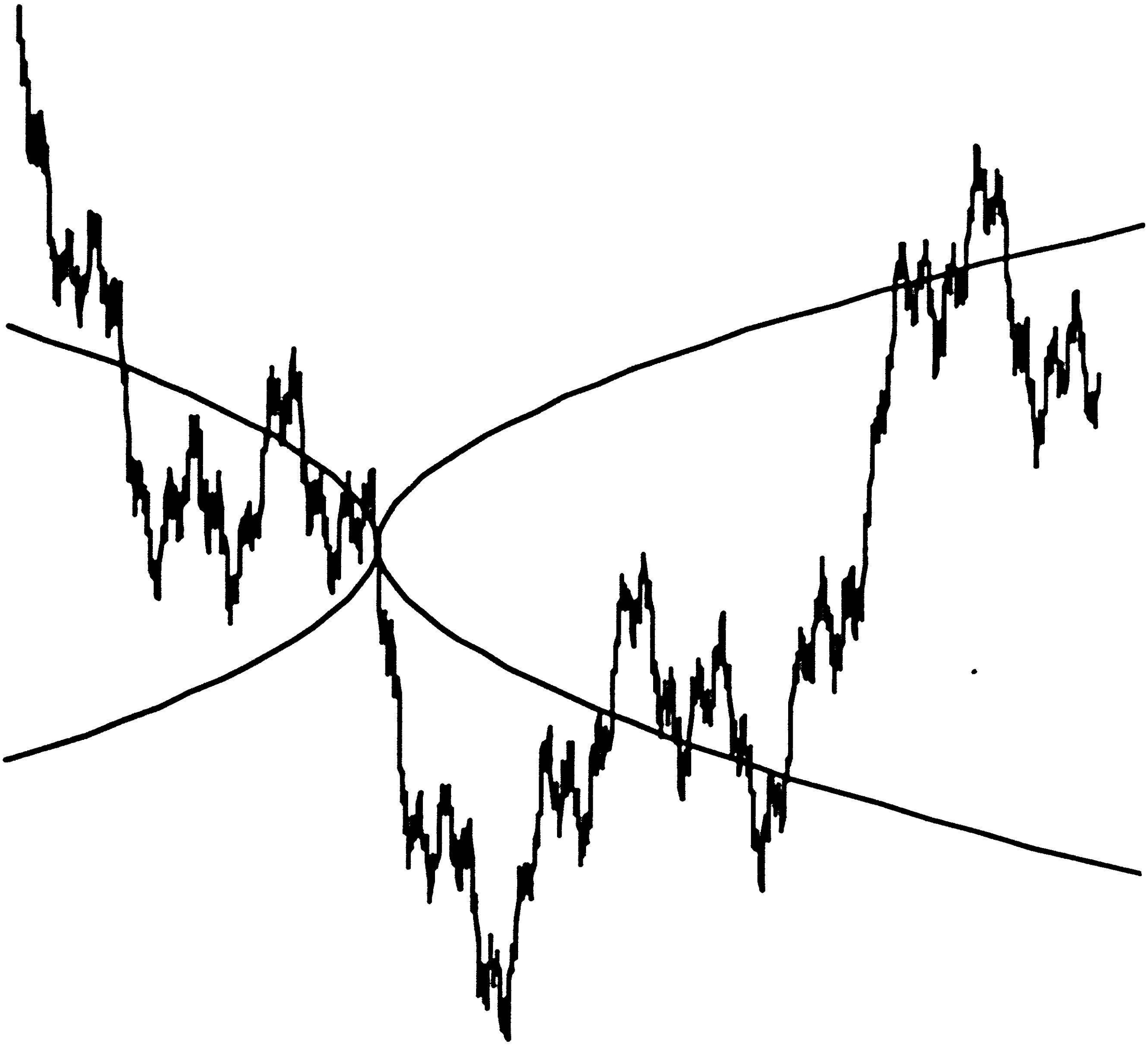

FIGURE 1

Graphe d'une fonction de Weierstrass et de la relation $|y - y_0| = \varepsilon|x - x_0|^{\alpha}$

La non-dérivabilité de la fonction f en tout point x est une conséquence simple de ce théorème. L'inégalité en conclusion empêche les quotients différentiels au point x d'être bornés. Nous présentons deux démonstrations de ce théorème. La première démonstration, élémentaire, n'est cependant valide que pour la fonction de Weierstrass $C(x)$ et que si b est un entier impair. La seconde démonstration relativement courte et un peu magique considère le cas général où b est un nombre réel supérieur à $1/a$.

2. Cas où b est un entier impair

Soient $m \geqslant 1$ un entier, $x \in \mathbf{R}$ et k un entier tel que $|b^m x/(2\pi) - k| \leqslant 1/2$. Posons $t = 2\pi k/b^m$ et $h = \pi/(2b^m)$. On a alors

$$C(t-h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t-h) , \quad C(t+h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t+h) ,$$

$$C(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n t + a^m/(1-a) .$$

Par suite

$$2C(t) - C(t-h) - C(t+h) = A + 2a^m/(1-a) ,$$

avec

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n(\cos b^n t)(1-\cos b^n h) \geqslant - \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n(1-\cos b^n h) .$$

Comme $1 - \cos \beta \leqslant \beta^2/2$, on obtient donc:

$$A \geqslant - \sum_{n=0}^{m-1} a^n(b^n h)^2 = - h^2\{(ab^2)^m - 1\}/(ab^2-1)$$
$$> - h^2(ab^2)^m/(ab^2-1) .$$

Finalement on a

$$2C(t) - C(t+h) - C(t-h) > a^m c ,$$

où $c = 2/(1-a) - \pi^2/[4(ab^2-1)]$ est positif. En effet on a

$$c = \{8(ab^2-1) - \pi^2(1-a)\}/\{4(1-a)(ab^2-1)\}$$

et comme le dénominateur est toujours positif, c est du même signe que le numérateur. On a $ab > 1$, d'où $8ab^2 + \pi^2 a > 8b + \pi^2/b$. Pour b entier plus grand que 1, on a $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$, car l'équation $8b^2 - (8+\pi^2)b + \pi^2 = 0$ a deux racines $b = 1$ et $b = \pi^2/8$.

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} &2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2\big(C(t) - C(x)\big) + \big(C(x) - C(t-h)\big) + \big(C(x) - C(t-h)\big) . \end{aligned}$$

Un des trois membres $C(t) - C(x)$, $C(x) - C(t+h)$, $C(x) - C(t-h)$ est donc supérieur à $ca^m/4$. Donc on peut trouver un point x_m tel que $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$ et $|x_m - x| \leqslant 3\pi/(2b^m)$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un entier m tel que $3\pi/(2b^m) \leqslant \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$. En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$. Pour $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$, le théorème est vérifié.

3. Cas général

a) Sans faire d'autre hypothèse sur b que $b > 1/a$, nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass $f(x) = C(x)$.

Soient L, N et m des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m .$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t \, dt$$

où h vaut $N\pi/b^m$.

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n = 0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m}\right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N .$$

Nous ferons appel aux inégalités $|\sin b^n h| \leqslant 1$ si $n \geqslant m - L$ et $|\sin b^n h| \leqslant b^n h$ si $n < m - L$. On a

$$|I - a^m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n = m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h} .$$

Nous minorons les quantités $|b^m - b^n|$ par la quantité $b^m - b^{m-1}$:

$$|I - a^m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^{m-1}} + \sum_{n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{(b^m - b^{m-1})h}$$

$$\leqslant \frac{2a^{m-L} b^{m-L}}{(ab-1)(b^m - b^{m-1})} + \frac{2a^{m-L}}{(b^m - b^{m-1})(1-a)h} .$$

On a donc, puisque $b^m h = N\pi > b^L$,

$$|I - a^m| \leqslant \frac{2a^{m-L} b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{m-L}}{(1-1/b)(1-a)N\pi} < sa^m$$

avec

$$s = \frac{2a^{-L} b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{-L}}{(1-1/b)(1-a)b^L} .$$

Il est possible de trouver un entier L suffisamment grand pour que $s < 1$. Si $c = (1-s)/2$, alors $c > 0$ et $I > 2ca^m$.

Remarquons que

$$I = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} [C(t) - C(x)] \cos(b^m t)\, dt \; ;$$

par suite, il existe au moins une valeur de x_m telle que $|x_m - x| \leqslant h$ et $|C(x_m) - C(x)| > ca^m$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un nombre entier $m > L$ tel que

$$h = N\pi / b^m \leqslant \delta < N\pi / b^{m-1} .$$

En se servant de cette dernière égalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = \alpha$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(\delta/(N\pi))^\alpha$. Pour $\varepsilon = ac(1/(N\pi))^\alpha$, le théorème est vérifié.

b) On peut modifier la démonstration précédente pour analyser la fonction $S(x)$. Pour ce faire, on pose

$$J = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} S(t) \sin b^m t\, dt \; ;$$

on supposera que h vaut $N\pi / b^m$. On a

$$J = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} - \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N$$

Par la suite, toutes les inégalités obtenues relatives aux quantités I se transposent de la même façon relativement aux quantités J et l'on établit le théorème pour la fonction $f = S$.

Remarque. D'une façon générale, pour toute suite de phases ϕ_n, les fonctions $f(x)$ de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b^n x - \phi_n)$ rempliront la conclusion du théorème si $b > 1/a$.

4. Conclusion

Nous avons exposé une démonstration très simple de la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass lorsque $b > 1/a$. Cependant nous n'avons pas complètement égalé la performance de Hardy qui a établi que même dans le cas $b = 1/a$, la fonction de Weierstrass est sans dérivée. Il y aurait lieu de simplifier l'argumentation de Hardy également dans ce cas.

Références

[1] Hardy, G. H. (1916). Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc. 17,* pp. 301-325.

[2] Weierstrass, F. (1872). Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *Mathematische Werke II,* pp. 71-74.

(Reçu le 22 juillet 1991)

Amar Baouche et Serge Dubuc
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, succ. A
Montréal (P.Q.)
H3C 3J7 Canada