

## 2. Cas où $b$ est un entier impair

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La non-dérivabilité de la fonction  $f$  en tout point  $x$  est une conséquence simple de ce théorème. L'inégalité en conclusion empêche les quotients différentiels au point  $x$  d'être bornés. Nous présentons deux démonstrations de ce théorème. La première démonstration, élémentaire, n'est cependant valide que pour la fonction de Weierstrass  $C(x)$  et que si  $b$  est un entier impair. La seconde démonstration relativement courte et un peu magique considère le cas général où  $b$  est un nombre réel supérieur à  $1/a$ .

2. CAS OÙ  $b$  EST UN ENTIER IMPAIR

Soient  $m \geq 1$  un entier,  $x \in \mathbf{R}$  et  $k$  un entier tel que  $|b^m x / (2\pi) - k| \leq 1/2$ . Posons  $t = 2\pi k / b^m$  et  $h = \pi / (2b^m)$ . On a alors

$$C(t-h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t-h), \quad C(t+h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t+h),$$

$$C(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n t + a^m / (1-a).$$

Par suite

$$2C(t) - C(t-h) - C(t+h) = A + 2a^m / (1-a),$$

avec

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n (\cos b^n t) (1 - \cos b^n h) \geq - \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n (1 - \cos b^n h).$$

Comme  $1 - \cos \beta \leq \beta^2/2$ , on obtient donc:

$$\begin{aligned} A &\geq - \sum_{n=0}^{m-1} a^n (b^n h)^2 = - h^2 \{ (ab^2)^m - 1 \} / (ab^2 - 1) \\ &> - h^2 (ab^2)^m / (ab^2 - 1). \end{aligned}$$

Finalement on a

$$2C(t) - C(t+h) - C(t-h) > a^m c,$$

où  $c = 2/(1-a) - \pi^2/[4(ab^2-1)]$  est positif. En effet on a

$$c = \{8(ab^2-1) - \pi^2(1-a)\} / \{4(1-a)(ab^2-1)\}$$

et comme le dénominateur est toujours positif,  $c$  est du même signe que le numérateur. On a  $ab > 1$ , d'où  $8ab^2 + \pi^2 a > 8b + \pi^2/b$ . Pour  $b$  entier plus

grand que 1, on a  $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$ , car l'équation  $8b^2 - (8 + \pi^2)b + \pi^2 = 0$  a deux racines  $b = 1$  et  $b = \pi^2/8$ .

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} & 2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2(C(t) - C(x)) + (C(x) - C(t-h)) + (C(x) - C(t+h)). \end{aligned}$$

Un des trois membres  $C(t) - C(x)$ ,  $C(x) - C(t+h)$ ,  $C(x) - C(t-h)$  est donc supérieur à  $ca^m/4$ . Donc on peut trouver un point  $x_m$  tel que  $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$  et  $|x_m - x| \leq 3\pi/(2b^m)$ .

Soit  $\delta \in ]0, 1[$ . On peut trouver un entier  $m$  tel que  $3\pi/(2b^m) \leq \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$ . En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité  $(1/b)^\alpha = a$ , on obtient que  $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$ . Pour  $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$ , le théorème est vérifié.

### 3. CAS GÉNÉRAL

a) Sans faire d'autre hypothèse sur  $b$  que  $b > 1/a$ , nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass  $f(x) = C(x)$ .

Soient  $L, N$  et  $m$  des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m.$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t dt$$

où  $h$  vaut  $N\pi/b^m$ .

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[ \frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N.$$

Nous ferons appel aux inégalités  $|\sin b^n h| \leq 1$  si  $n \geq m - L$  et  $|\sin b^n h| \leq b^n h$  si  $n < m - L$ . On a

$$|I - a^m| \leq \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h}.$$