

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS
Kapitel: 3. Cas général
Autor: Baouche, A. / Dubuc, S.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59484>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

grand que 1, on a $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$, car l'équation $8b^2 - (8 + \pi^2)b + \pi^2 = 0$ a deux racines $b = 1$ et $b = \pi^2/8$.

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} & 2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2(C(t) - C(x)) + (C(x) - C(t-h)) + (C(x) - C(t+h)). \end{aligned}$$

Un des trois membres $C(t) - C(x)$, $C(x) - C(t+h)$, $C(x) - C(t-h)$ est donc supérieur à $ca^m/4$. Donc on peut trouver un point x_m tel que $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$ et $|x_m - x| \leq 3\pi/(2b^m)$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un entier m tel que $3\pi/(2b^m) \leq \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$. En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$. Pour $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$, le théorème est vérifié.

3. CAS GÉNÉRAL

a) Sans faire d'autre hypothèse sur b que $b > 1/a$, nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass $f(x) = C(x)$.

Soient L, N et m des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m.$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t dt$$

où h vaut $N\pi/b^m$.

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N.$$

Nous ferons appel aux inégalités $|\sin b^n h| \leq 1$ si $n \geq m - L$ et $|\sin b^n h| \leq b^n h$ si $n < m - L$. On a

$$|I - a^m| \leq \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h}.$$

Nous minorons les quantités $|b^m - b^n|$ par la quantité $b^m - b^{m-1}$:

$$\begin{aligned} |I - a^m| &\leq \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^{m-1}} + \sum_{n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{(b^m - b^{m-1})h} \\ &\leq \frac{2a^{m-L} b^{m-L}}{(ab-1)(b^m - b^{m-1})} + \frac{2a^{m-L}}{(b^m - b^{m-1})(1-a)h}. \end{aligned}$$

On a donc, puisque $b^m h = N\pi > b^L$,

$$|I - a^m| \leq \frac{2a^{m-L} b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{m-L}}{(1-1/b)(1-a)N\pi} < sa^m$$

avec

$$s = \frac{2a^{-L} b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{-L}}{(1-1/b)(1-a)b^L}.$$

Il est possible de trouver un entier L suffisamment grand pour que $s < 1$. Si $c = (1-s)/2$, alors $c > 0$ et $I > 2ca^m$.

Remarquons que

$$I = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} [C(t) - C(x)] \cos(b^m t) dt;$$

par suite, il existe au moins une valeur de x_m telle que $|x_m - x| \leq h$ et $|C(x_m) - C(x)| > ca^m$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un nombre entier $m > L$ tel que

$$h = N\pi / b^m \leq \delta < N\pi / b^{m-1}.$$

En se servant de cette dernière égalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = \alpha$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(\delta/(N\pi))^\alpha$. Pour $\varepsilon = ac(1/(N\pi))^\alpha$, le théorème est vérifié.

b) On peut modifier la démonstration précédente pour analyser la fonction $S(x)$. Pour ce faire, on pose

$$J = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} S(t) \sin b^m t dt;$$

on supposera que h vaut $N\pi/b^m$. On a

$$J = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} - \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N$$

Par la suite, toutes les inégalités obtenues relatives aux quantités I se transposent de la même façon relativement aux quantités J et l'on établit le théorème pour la fonction $f = S$.

Remarque. D'une façon générale, pour toute suite de phases ϕ_n , les fonctions $f(x)$ de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b^n x - \phi_n)$ rempliront la conclusion du théorème si $b > 1/a$.

4. CONCLUSION

Nous avons exposé une démonstration très simple de la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass lorsque $b > 1/a$. Cependant nous n'avons pas complètement égalé la performance de Hardy qui a établi que même dans le cas $b = 1/a$, la fonction de Weierstrass est sans dérivée. Il y aurait lieu de simplifier l'argumentation de Hardy également dans ce cas.

RÉFÉRENCES

- [1] HARDY, G. H. (1916). Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.* 17, pp. 301-325.
- [2] WEIERSTRASS, F. (1872). Über kontinuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *Mathematische Werke II*, pp. 71-74.

(Reçu le 22 juillet 1991)

Amar Baouche et Serge Dubuc

Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, succ. A
Montréal (P.Q.)
H3C 3J7 Canada