

Remark on the uniqueness of the finite packings of maximal density

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REMARK ON THE UNIQUENESS OF THE FINITE PACKINGS
OF MAXIMAL DENSITY

All natural or practical examples of circle packings such as bees living in a honeycomb or a bundle of fibre-glass optical tubes are always packing problems of a finite number of circles (i.e. packings of their cross-section circles). The infinite circle packings of the entire plane of E^2 are actually the limit situation of the finite circle packings. Therefore, it is natural to give an appropriate definition of the concept of global density for a finite circle packing. We propose the following definition of a cluster of circles and the (global) density of a cluster of circles, namely

Definition. A packing of finite number of equal circles is called a *cluster of circles* if any two of them can be linked through neighboring pairs of center distances less than $2\sqrt{2}$ times the radii.

Let \mathcal{C} be a given cluster of circles. Then, an extension, \mathcal{C}^* , of \mathcal{C} is called a *saturated coating of \mathcal{C}* if all circles of $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{C}$ are neighbors of some circles in \mathcal{C} and it is impossible to add any more such neighbors to \mathcal{C}^* . Observe that *every circle in \mathcal{C} has a saturated set of neighbors in \mathcal{C}^** and hence has a well-defined *local cell* with respect to \mathcal{C}^* . The *usual weighted average* of all the local densities of circles in \mathcal{C} with respect to the given saturated coating \mathcal{C}^* is defined to be the density of \mathcal{C} in \mathcal{C}^* , i.e. $\rho(\mathcal{C} \text{ rel } \mathcal{C}^*)$.

Definition: The global density of \mathcal{C} is defined to be the least upper bound of the densities of \mathcal{C} in all possible saturated coatings of \mathcal{C} , namely

$$\rho(\mathcal{C}) = \text{l.u.b.} \{ \rho(\mathcal{C} \text{ rel } \mathcal{C}^*) \}$$

where \mathcal{C}^* run through all possible saturated coatings of \mathcal{C} .

UNIQUENESS THEOREM (On finite circle packings of maximal density). $\pi/\sqrt{12}$ is still the maximal possible global density of all clusters of circles, and the global density of a cluster of circles, \mathcal{C} , attains the above maximum of $\pi/\sqrt{12}$ when and only when \mathcal{C} is a subcluster of circles in the hexagon packing.

Proof. It is again a direct consequence of the above Theorem on the maximal local density and its uniqueness.