

# 7. Schmidt's Game

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Good also obtained the estimate  $.5306 < \dim \mathcal{E}_2 < .5320$ . This was improved by Bumby [48] in 1985 to  $.5312 \leq \dim \mathcal{E}_2 \leq .5314$ . More recently, Hensley [140] showed that  $.53128049 < \dim \mathcal{E}_2 < .53128051$ . For other results on the Hausdorff dimension of  $\mathcal{E}_k$  and related sets, see Jarník [153]; Besicovitch [30]; Rogers [262]; Baker and Schmidt [21]; Hirst [147, 148]; Billingsley and Henningsen [32]; Cusick [63, 64, 65]; Pollington [245]; Kaufman [158]; Marion [202]; Gardner and Mauldin [115]; Ramharter [253, 254]; and Hensley [139, 141, 308, 309].

## 7. SCHMIDT'S GAME

W. M. Schmidt [270] introduced the following two-player game, called an  $(\alpha, \beta)$  game: let  $\alpha, \beta$  be real numbers with  $0 < \alpha, \beta < 1$ . First Bob chooses a closed interval on the real line, called  $B_1$ . Then Alice chooses a closed interval  $A_1 \subset B_1$ , such that the length of  $A_1$  is  $\alpha$  times the length of  $B_1$ . Then Bob chooses a closed interval  $B_2 \subset A_1$ , such that the length of  $B_2$  is  $\beta$  times the length of  $A_1$ , and so on. If the intersection of all the intervals  $A_i$  is a number with bounded partial quotients, then Alice is declared the winner; otherwise Bob is declared the winner.

Schmidt showed that if  $0 < \alpha < 1/2$ , then Alice always has a winning strategy for this game. This is somewhat surprising, since as we have seen above, the set  $\mathcal{E}$  of numbers with bounded partial quotients has Lebesgue measure 0.

Using the theory of  $(\alpha, \beta)$  games, Schmidt also reproved the result of Jarník that  $\mathcal{E}$  has Hausdorff dimension 1.

Several papers have proved other results on  $(\alpha, \beta)$  games: see Schmidt [271]; Freiling [109, 110]; and Dani [70, 71, 72]. Also see Schmidt [272, Chapter 3].

## 8. HALL'S THEOREM

If  $S$  and  $T$  are sets, then by  $S + T$  we mean the set

$$\{s + t \mid s \in S, t \in T\}.$$

Similarly, by  $S \cdot T$  we mean the set

$$\{st \mid s \in S, t \in T\}.$$

If  $S$  is a set of Lebesgue measure zero, then it is quite possible for  $S + S$  to have positive measure. For example, if  $C$  denotes the Cantor set (numbers