

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES  
ALGÈBRES DE LEIBNIZ  
**Kapitel:** 2. Exemples d'algèbres de Leibniz  
**Autor:** Loday, Jean-Louis  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60428>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. EXEMPLES D'ALGÈBRES DE LEIBNIZ

2.0. *Algèbres de Lie.* Il est clair d'après ce qu'on a dit précédemment qu'une algèbre de Lie est un cas particulier d'algèbre de Leibniz. Si l'on quotiente l'algèbre de Leibniz  $\mathfrak{g}$  par l'idéal bilatère engendré par les crochets  $[x, x]$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , on obtient une algèbre de Lie que l'on note  $\mathfrak{g}_{\text{Lie}}$ . Le morphisme  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_{\text{Lie}}$  est universel pour tout morphisme de  $\mathfrak{g}$  dans une algèbre de Lie. Son noyau est noté  $\mathfrak{g}^{\text{ann}}$ .

2.1. *Action pré-croisée.* Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $M$  un  $\mathfrak{g}$ -module. On note  $m^g$  l'action de  $g \in \mathfrak{g}$  sur  $m \in M$ . Soit  $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}$  une application linéaire  $\mathfrak{g}$ -équivariante c'est-à-dire

$$\mu(m^g) = [\mu(m), g], \quad \forall m \in M, \forall g \in \mathfrak{g}.$$

Le crochet  $[-, -]'$  défini sur  $M$  par

$$[m, n]' := m^{\mu(n)}, \quad \forall m, n \in M,$$

munit  $M$  d'une structure d'algèbre de Leibniz. Constatons que  $\mu$  devient un morphisme d'algèbres de Leibniz.

Remarquons que toute algèbre de Leibniz  $\mathfrak{h}$  peut être considérée comme un  $\mathfrak{h}_{\text{Lie}}$ -module muni d'un  $\mathfrak{h}_{\text{Lie}}$ -homomorphisme  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_{\text{Lie}}$ . Appliquée à cette situation la procédure précédente redonne bien évidemment la structure d'algèbre de Leibniz de départ de  $\mathfrak{h}$ .

2.2 *Algèbre associative avec opérateur.* Soit  $A$  une  $k$ -algèbre associative munie d'une application  $k$ -linéaire  $D: A \rightarrow A$  vérifiant

$$(*) \quad D(a(Db)) = Da Db = D((Da)b), \quad \text{pour tout } a, b \in A.$$

On définit alors un crochet sur  $A$  en posant

$$[a, b] := aDb - Db a.$$

On vérifie que le  $k$ -module  $A$ , muni de ce crochet est une algèbre de Leibniz que l'on note  $A_D$ . Il y a de nombreux exemples de telles situations.

De manière évidente  $D = \text{Id}$  vérifie (\*) et  $A_{\text{Id}}$  est l'algèbre de Lie classique associée à une algèbre associative.

— Soit  $D: A \rightarrow A$  un endomorphisme d'algèbre tel que  $D^2 = D$  (idempotent), alors (\*) est vérifiée.

— Soit  $D: A \rightarrow A$  une dérivation de  $A$  de carré nul ( $D^2 = 0$ ). La relation (\*) est aussi vérifiée.

2.3. *Module tensoriel et algèbre de Leibniz libre [L-P].*

Soit  $V$  un  $k$ -module et  $\bar{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$  le module tensoriel sur  $V$  quotienté par la partie de degré 0 ( $= k$ ). On peut montrer qu'il existe une et une seule structure d'algèbre de Leibniz sur  $\bar{T}(V)$  vérifiant

$$[x, v] = x \otimes v, \quad \text{pour tout } x \in \bar{T}(V), v \in V.$$

L'algèbre de Leibniz  $\mathcal{L}(V)$  ainsi définie est en fait l'algèbre de Leibniz libre sur  $V$ , i.e. le foncteur  $\mathcal{L}$  est adjoint à gauche du foncteur oubli des algèbres de Leibniz dans les  $k$ -modules.

Notons que  $\mathcal{L}(V)_{\text{Lie}}$  est l'algèbre de Lie libre sur  $V$ . L'application canonique  $\bar{T}(V) = \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)_{\text{Lie}}$  est induite par

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto [[\dots [x_1, \dots], x_{n-1}], x_n].$$

2.4. *Complexe de Hochschild.* Soit  $A$  une algèbre associative sur  $k$  et considérons le bord de Hochschild

$$\begin{aligned} b: A \otimes_k A \otimes_k A &\rightarrow A \otimes_k A, \\ b(x \otimes y \otimes z) &= xy \otimes z - x \otimes yz + zx \otimes y. \end{aligned}$$

Munissons le quotient  $A \otimes A / \text{Im } b$  du crochet

$$[a \otimes b, c \otimes d] = (ab - ba) \otimes (cd - dc).$$

On vérifie que ce crochet est bien défini et satisfait à la relation (L). Donc  $A \otimes A / \text{Im } b$  est une algèbre de Leibniz (qui n'est pas une algèbre de Lie en général). Si on munit  $A$  de sa structure d'algèbre de Lie usuelle, l'opérateur

$$b: A \otimes A / \text{Im } b \rightarrow A, \quad b(x \otimes y) = xy - yx,$$

devient un homomorphisme d'algèbres de Leibniz. Son noyau (resp. conoyau) est le groupe d'homologie de Hochschild  $HH_1(A)$  (resp.  $HH_0(A)$ ).

2.5. *Basses dimensions.* Si  $\mathfrak{g}$  est de dimension 1 sur  $k$  on a  $[x, x] = \alpha x$  pour un certain  $\alpha \in k$ . C'est un crochet de Leibniz si et seulement si  $\alpha^2 = 0$ . Donc si  $k$  est sans diviseurs de zéro, la seule structure d'algèbre de Leibniz sur  $k$  est la structure abélienne. Si  $\mathfrak{g}$  est de dimension 2 engendrée par  $x$  et  $y$  et si  $k$  est un corps, il y a 3 types d'algèbre de Leibniz suivant la structure de  $\mathfrak{g}^{\text{ann}}$ .

— si  $\dim \mathfrak{g}^{\text{ann}} = 0$ , alors  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie,

— si  $\dim \mathfrak{g}^{\text{ann}} = 1$  et si  $\mathfrak{g}^{\text{ann}}$  est un module trivial sur  $\mathfrak{g}_{\text{Lie}}$ , alors  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à l'algèbre définie par

$$[x, x] = [y, x] = [x, y] = 0 \quad \text{et} \quad [y, y] = x;$$

— si  $\dim \mathfrak{g}^{ann} = 1$  et si  $\mathfrak{g}^{ann}$  est un module non trivial sur  $\mathfrak{g}_{Lie}$ , alors  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à l'algèbre définie par

$$[x, x] = [y, x] = 0, [x, y] = x \quad \text{et} \quad [y, y] = x.$$

2.6. *Algèbre de Lie partielle.* Considérons deux algèbres de Lie  $\mathfrak{g}_1$ , et  $\mathfrak{g}_0$  munies d'homomorphismes  $d_0, d_1: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_0$  et  $s_0: \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_1$  vérifiant  $d_0 s_0 = \text{id} = d_1 s_0$  (par exemple le début d'une algèbre de Lie simpliciale). Posons  $\mathfrak{g} = \text{Ker } d_1$  et définissons un nouveau crochet  $[-, -]'$  sur  $\mathfrak{g}$  par:

$$[x, y]' = [x, s_0 d_0(y)].$$

On vérifie que ce crochet munit  $\mathfrak{g}$  d'une structure d'algèbre de Leibniz. Cette construction apparaît naturellement dans le travail de Baues et Conduché [B-C] sur les modèles homotopiques minimaux. Elle est appelée «algèbre de Lie partielle» et est obtenue comme série centrale descendante d'un module pré-croisé de groupes. C'est un sous-exemple de 2.1.

2.7. *Mécanismes hamiltoniens.* (J.-L. Koszul [K2]). Soit  $\mathfrak{g}$  une super-algèbre de Lie  $\mathbf{Z}$ -graduée. On note  $\mathfrak{g}_j^i$ , la composante de bidegré  $(i, j)$ ,  $i \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $j \in \mathbf{Z}$ . Soit  $w \in \mathfrak{g}_1^1$  tel que  $[w, w] = 0$ . On définit un crochet  $[-, -]_w$  sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  par

$$[a, b]_w := [a, [w, b]].$$

Ce crochet définit sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  une structure de super-algèbre de Leibniz (à condition d'échanger les parités de  $\mathfrak{g}_{-1}$ ).

2.8. *Formes différentielles* (J.-L. Brylinski [B]). Soit  $X$  une variété différentiable de dimension  $n$  et  $\eta \in \Omega^n(X)$  une forme volume. On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie des champs de vecteurs  $\xi$  sur  $X$  tels que  $\mathcal{L}(\xi) \cdot \eta = 0$ . L'application  $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^{n-1}(X)_{cl}$ ,  $\xi \mapsto i(\xi) \cdot \eta$  dans les formes fermées est un isomorphisme qui permet de munir  $\Omega^{n-1}(X)_{cl}$  d'une structure d'algèbre de Lie, dont  $d\Omega^{n-2}(X)$  est une sous-algèbre de Lie. On définit alors un crochet sur  $\Omega^{n-2}(X)$  par

$$[\alpha, \beta] := \mathcal{L}(\psi^{-1}d(\alpha)) \cdot \beta$$

qui munit  $\Omega^{n-2}(X)$  d'une structure d'algèbre de Leibniz gauche. Notons que la suite

$$0 \rightarrow \Omega^{n-2}(X)_{cl} \rightarrow \Omega^{n-2}(X) \rightarrow d\Omega^{n-2}(X) \rightarrow 0$$

est une extension centrale antisymétrique d'algèbres de Leibniz (cf. 4.3).