

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Kapitel:** 2.1. Sous-cogèbres  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

D'autre part, l'axiome (2) de la déf. 1 montre que  $V^o$  est contenu dans  $(e \otimes 1_E)(C \otimes V)$ , donc dans  $V$ . Enfin, il est clair que tout sous-comodule de  $E$  contenu dans  $V$  est contenu dans  $V^o$ , cqfd.

Nous dirons qu'un comodule est de *type fini* (resp. libre, projectif, ...) si c'est un  $K$ -module de type fini (resp. un  $K$ -module libre, un  $K$ -module projectif, ...).

**COROLLAIRE.** *Supposons  $K$  noethérien. Tout comodule  $E$  est alors réunion filtrante croissante de ses sous-comodules de type fini.*

Il suffit évidemment de prouver ceci: si  $W$  est un sous-module de type fini de  $E$ , il existe un sous-comodule de  $E$ , qui est de type fini et contient  $W$ . Or  $d_E(W)$  est un sous-module de type fini de  $C \otimes E$ . On peut donc trouver un sous-module  $V$  de type fini de  $E$  tel que  $C \otimes V$  contienne  $d_E(W)$ . Soit  $V^o$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $d_E(x) \in C \otimes V$ . D'après la proposition,  $V^o$  est un sous-comodule de  $E$  contenu dans  $V$ , donc de type fini (puisque  $K$  est noethérien). Il est clair que  $V^o$  contient  $W$ , cqfd.

## §2. COGÈBRES SUR UN CORPS

A partir de maintenant, l'anneau de base  $K$  est un *corps*.

### 2.1. SOUS-COGÈBRES

Soit  $C$  une cogèbre sur  $K$ , de coproduit  $d$  et de co-unité  $e$ .

**DÉFINITION 1.** *Un sous-espace vectoriel  $X$  de  $C$  est appelé une sous-cogèbre de  $C$  si  $d(X)$  est contenu dans  $X \otimes X$ .*

S'il en est ainsi, l'application linéaire  $d_X: X \rightarrow X \otimes X$  induite par  $d$  munit  $X$  d'une structure de cogèbre, ayant pour co-unité la restriction de  $e$  à  $X$ .

#### *Exemples*

1) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-cogèbres de  $C$ , la somme des  $X_i$  et l'intersection des  $X_i$  sont des sous-cogèbres de  $C$ . Cela se vérifie au moyen des formules:

$$\begin{aligned} \sum (X_i \otimes X_i) &\subset (\sum X_i) \otimes (\sum X_i) \\ \cap (X_i \otimes X_i) &= (\cap X_i) \otimes (\cap X_i) . \end{aligned}$$

2) Une sous-cogèbre de rang 1 (sur  $K$ ) de  $C$  a pour base un élément non nul  $x$  tel que  $d(x) = x \otimes x$ ; on a alors  $e(x) = 1$ .

3) Si  $D$  est une cogèbre, et si  $f: D \rightarrow C$  est un morphisme de cogèbres,  $f(D)$  est une sous-cogèbre de  $C$ .

4) Soit  $E$  un comodule sur  $C$ , soit  $(v_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ , et soient  $c_{ij} \in C$  tels que  $d_E(v_i) = \sum c_{ij} \otimes v_j$ , cf. n° 1.2, Remarque 3. Il résulte de la formule (1') du n° 1.2 que le sous-espace vectoriel  $C_E$  engendré par les  $c_{ij}$  est une sous-cogèbre de  $C$ . Cette sous-cogèbre ne dépend pas du choix de la base  $(v_i)$ , car c'est l'image de l'application  $E \otimes E' \rightarrow C$  associée à  $d_E$  (cf. n° 1.2, Remarque 2). On peut aussi caractériser  $C_E$  comme le plus petit sous-espace vectoriel  $X$  de  $C$  tel que  $\text{Im}(d_E) \subset X \otimes E$ .

Noter que, si  $D$  est une sous-cogèbre de  $C$  contenant  $C_E$ , le coproduit  $d_E$  applique  $E$  dans  $D \otimes E$ , donc munit  $E$  d'une structure de  $D$ -comodule; inversement, tout  $D$ -comodule peut évidemment être considéré comme un  $C$ -comodule.

5) On peut appliquer la construction précédente en prenant pour  $E$  un sous-comodule de  $C$ . Dans ce cas, la sous-cogèbre  $C_E$  contient  $E$ . En effet,  $C_E$  est l'image de  $E \otimes E' \rightarrow C$ ; d'autre part la restriction de  $e$  à  $E$  est un élément  $e_E$  de  $E'$  et l'on vérifie tout de suite que, si  $x \in E$ , l'image de  $x \otimes e_E$  dans  $C$  est égale à  $x$ .

6) Supposons  $C$  de rang fini (sur  $K$ ), et soit  $A$  l'algèbre duale (cf. n° 1.1, Exemple 3). Les sous-cogèbres de  $C$  correspondent bijectivement (par dualité) aux algèbres quotients de  $A$  (donc aussi aux idéaux bilatères de  $A$ ).

**THÉORÈME 1.** *La cogèbre  $C$  est réunion filtrante croissante de ses sous-cogèbres de rang fini.*

Il suffit de prouver que tout sous-espace vectoriel  $W$  de rang fini de  $C$  est contenu dans une sous-cogèbre de rang fini. Or, d'après le corollaire à la prop. 3 du n° 1.4, il existe un sous-comodule  $E$  de  $C$  qui est de rang fini et contient  $W$ . La sous-cogèbre  $C_E$  associée à  $E$  (cf. Exemple 4) répond à la question: elle est évidemment de rang fini, et elle contient  $E$  (cf. Exemple 5), donc  $W$ . Cqfd.

## 2.2. DUALITÉ ENTRE COGÈBRES ET ALGÈBRES PROFINIES

**DÉFINITION 2.** *On appelle algèbre profinie une algèbre topologique séparée, complète, possédant une base de voisinages de 0 formée d'idéaux bilatères de codimension finie.*