# 3.4. Une interprétation des points de G

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

[Il y a un résultat plus général, dû sauf erreur à Grothendieck, et que le rédacteur a la flemme de rédiger en détail. Au lieu de se donner, comme ici, une sous-cogèbre d'une bigèbre, on se donne seulement une *cogèbre* $D$ et une opération de «produit tensoriel» sur la catégorie $M = \mathrm{Com}^f_D$ correspondante (la donnée de $D$ est d'ailleurs équivalente à celle du couple formé de $M$ et du foncteur $\upsilon: M \to \mathrm{Vect}_K$, cf. n° 2.5, th. 3). En imposant à ce produit tensoriel des conditions raisonnables (en particulier $\upsilon(E \otimes F) \simeq \upsilon(E) \otimes \upsilon(F)$) on démontre alors qu'il provient d'une structure de *bigèbre* bien déterminée sur $D$; cette bigèbre a un élément unité si $M$ contient un élément unité pour le produit tensoriel; elle a une inversion, si l'on se donne une opération «contragrédiente». (Au lieu de se donner le produit tensoriel et la contragrédiente, on peut aussi se donner un foncteur «Hom».)

Grothendieck a rencontré cette situation avec $K = \mathbf{Q}$, $M$ = catégorie des *motifs* sur un corps de base $k$ et $\upsilon$ = foncteur «cohomologie à valeurs dans $\mathbf{Q}$» relativement à un plongement de $k$ dans $\mathbf{C}$.]

## 3.4. Une interprétation des points de $G$

Soit $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$ et soit $g \in G(K_1)$ un point de $G$ à valeurs dans $K_1$. Pour tout $E \in \mathrm{Com}^f_C$, notons $g(E)$ l'image de $g$ par l'antireprésentation

$$\rho(E): G(K_1) \to \mathrm{End}_E(K_1)\ .$$

On a donc $g(E) \in \mathrm{End}_E(K_1) = \mathrm{End}_{K_1}(K_1 \otimes E)$, et de plus:

(i) $g(K) = 1_{K_1}$

(ii) $g(E_1 \otimes E_2) = g(E_1) \otimes g(E_2)$.

Réciproquement:

Proposition 4. *Soit* $\upsilon_{K_1}: \mathrm{Com}^f_C \to \mathrm{Mod}_{K_1}$ *le foncteur qui associe à tout* $E \in \mathrm{Com}^f_C$ *le* $K_1$*-module* $K_1 \otimes E$. *Soit* $\varphi: \upsilon_{K_1} \to \upsilon_{K_1}$ *un endomorphisme de* $\upsilon_{K_1}$ *vérifiant les relations* (i) *et* (ii) *ci-dessus. Il existe alors un élément unique* $g \in G(K_1)$ *tel que* $\varphi = g$.

D'après 3.2, l'application $G(K_1) \to \mathrm{End}(\upsilon_{K_1})$ est un antihomomorphisme de monoïdes. La prop. 4 donne donc:

Corollaire. *Le monoïde* $G(K_1)$ *est isomorphe à l'opposé du monoïde des endomorphismes de* $\upsilon_{K_1}$ *vérifiant* (i) *et* (ii).

[C'est là un résultat analogue au *théorème de dualité de Tannaka*; on reviendra là-dessus plus loin.]

*Remarques*

1) Dans l'énoncé de la prop. 4, on peut remplacer $\mathrm{Com}_C^f$ par $\mathrm{Com}_C$; cela revient au même, du fait que tout objet de $\mathrm{Com}_C$ est limite inductive d'objets de $\mathrm{Com}_C^f$, cf. § 1.

2) Lorsque $G$ est un *schéma en groupes,* les $g(E)$ vérifient la relation suivante (qui est donc conséquence de (i) et (ii):

(iii) $g(\check{E}) = g(E)^{\vee}$.

*Démonstration de la proposition 4.*

Tout d'abord, soit $u \in \mathrm{Hom}(C, K_1)$. Pour tout $E \in \mathrm{Com}_C$, soit $\varphi_u(E)$ l'endomorphisme de $K_1 \otimes E$ qui prolonge l'application linéaire

$$E \xrightarrow{d_E} C \otimes E \xrightarrow{u \otimes 1} K_1 \otimes E \, .$$

On obtient ainsi un *endomorphisme* $\varphi_u$ de $v_{K_1}$.

LEMME 1. *L'application* $u \mapsto \varphi_u$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Hom}(C, K_1)$ *sur le groupe des endomorphismes du foncteur* $v_{K_1}$.

[En fait, c'est un isomorphisme de $K_1$-algèbres, à condition de mettre sur $\mathrm{Hom}(C, K_1)$ la structure d'algèbre opposée de celle à laquelle on pense.]

Si $\varphi \in \mathrm{End}(v_{K_1})$, formons le composé

$$C \to K_1 \otimes C \to K_1 \otimes C \to K_1$$

(la première application étant $x \mapsto 1 \otimes x$, la seconde $\varphi(C)$ et la troisième $1 \otimes e$). On obtient une application linéaire

$$u(\varphi) : C \to K_1 \, .$$

Il suffit de prouver que les applications $u \mapsto \varphi_u$ et $\varphi \mapsto u(\varphi)$ sont inverses l'une de l'autre.

Tout d'abord, si $u \in \mathrm{Hom}(C, K_1)$, $u(\varphi_u)$ est le composé

$$C \xrightarrow{d} C \otimes C \xrightarrow{u \otimes 1} K_1 \otimes C \xrightarrow{1 \otimes e} K_1 \, ,$$

ou encore

$$C \xrightarrow{d} C \otimes C \xrightarrow{1 \otimes e} C \xrightarrow{u} K_1 \, ,$$

c'est-à-dire $u$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathrm{End}(v_{K_1})$. Si $E$ est un comodule, et $V$ un $K$-espace vectoriel, on a $\varphi(E \otimes V) = \varphi(E) \otimes 1_V$. (Se ramener au cas où $V$ est de dimension finie, puis choisir une base de $V$ et utiliser le fait que $\varphi$ est un morphisme de foncteurs.) En particulier, on a $\varphi(C \otimes E) = \varphi(C) \otimes 1_E$ si $E \in \mathrm{Com}_C$. Comme $d_E : E \to C \otimes E$ est un morphisme de comodules, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
E & \to & K_1 \otimes E & \xrightarrow{1 \otimes d_E} & K_1 \otimes C \otimes E & & \\
 & & \varphi(E) \downarrow & & \varphi(C) \otimes 1 \downarrow & & \\
 & & K_1 \otimes E & \xrightarrow[1 \otimes d_E]{} & K_1 \otimes C \otimes E & \xrightarrow{1 \otimes C \otimes 1} & K_1 \otimes E .
\end{array}$$

Mais le composé $(1 \otimes e \otimes 1) \circ (1 \otimes d_E)$ est l'identité. En utilisant la commutativité du diagramme, on en déduit alors que le composé

$$E \to K_1 \otimes E \xrightarrow{\varphi(E)} K_1 \otimes E$$

est égal à $\varphi_u(E)$, avec $u = u(\varphi)$, d'où le lemme.

[Ce lemme n'a rien à voir avec les bigèbres. On aurait pu le remonter au §2 et le déduire de l'isomorphisme $\mathrm{Com}^f_C = \mathrm{Com}^f_{A^0}$ du n° 2.2.]

LEMME 2. (a) *Pour que* $\varphi_u$ *vérifie la relation* (i), *il faut et il suffit que* $u(1) = 1$.

(b) *Pour que* $\varphi_u$ *vérifie la relation* (ii), *il faut et il suffit que* $u$ *soit un homomorphisme d'algèbres.*

Si l'on prend pour $E$ le module unité $K$, on a $K_1 \otimes E = K_1$ et $\varphi_u(E)$ est la multiplication par $u(1)$ dans $K_1$; d'où (a).

Pour (b), on remarque d'abord que (ii) est vérifiée si et seulement si elle l'est pour $E_1 = E_2 = C$, i.e. si

(ii′) $\varphi_u(C \otimes C) = \varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C)$.

Cela résulte simplement de ce que tout comodule est isomorphe à un sous-comodule d'une somme directe de comodules tous isomorphes à $C$.

Reste à exprimer la condition (ii′). Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de $C$, soient $a, b \in C$, et écrivons $d(a)$ et $d(b)$ sous la forme

$$d(a) = \sum a_i \otimes x_i\,, \quad a_i \in C$$
$$d(b) = \sum b_j \otimes x_j\,, \quad b_j \in C\,.$$

On a alors:

$$\varphi_u(C)(a) = \sum u(a_i) \otimes x_i\,, \qquad \text{avec} \quad u(a_i) \in K_1$$

et

$$\varphi_u(C)(b) = \sum u(b_j) \otimes x_j\,, \qquad \text{avec} \quad u(b_j) \in K_1\,.$$

D'où:

$$(*) \qquad (\varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C))(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i)u(b_j) \otimes x_i \otimes x_j\,.$$

Soit d'autre part $d' : C \otimes C \to C \otimes C \otimes C$ le coproduit du comodule $C \otimes C$. On vérifie sans difficulté que l'on a

$$d'(a \otimes b) = \sum_{i,j} a_i b_j \otimes x_i \otimes x_j \, ,$$

d'où

$$(**) \qquad \varphi_u(C \otimes C)(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i b_j) \otimes x_i \otimes x_j \, .$$

En comparant (*) et (**), on voit que $\varphi_u(C \otimes C) = \varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C)$ si $u$ est un homomorphisme d'algèbres. Pour prouver la réciproque, choisissons pour $(x_i)_{i \in I}$ une base telle que $x_o = 1$ pour un élément $0 \in I$ et $e(x_i) = 0$ pour $i \neq 0$. On a alors $a_o = a$ et $b_o = b$, et l'égalité de (*) et (**) entraîne $u(a)u(b) = u(ab)$, ce qui achève la démonstration.

La prop. 4 est une conséquence immédiate des deux lemmes ci-dessus. En effet, un élément de $G(K_1)$ est *par définition* un homomorphisme d'algèbres $u : C \to K_1$ tel que $u(1) = 1$. La seule chose à vérifier, c'est que, pour tout comodule $E$, l'endomorphisme $u(E)$ de $K_1 \otimes E$ défini par $u$ est égal à $\varphi_u(E)$: or c'est justement la définition de $u(E)$, cf. démonstration de la prop. 1.

*Exemple.* Prenons pour $K_1$ l'algèbre des *nombres duaux* sur $K$. La prop. 4 fournit alors un anti-isomorphisme de *l'algèbre de Lie* de $G$ sur la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(\upsilon)$ formée des endomorphismes $\theta$ de $\upsilon$ tels que

$$\theta(K) = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta(E_1 \otimes E_2) = \theta(E_1) \otimes 1_{E_2} + 1_{E_1} \otimes \theta(E_2) \, .$$

### 3.5. Interprétation de $G$ comme limite projective de groupes algébriques linéaires

DÉFINITION 2. *On dit que $C$ est de type fini (ou que $G$ est algébrique linéaire) si $C$ est de type fini comme algèbre sur $K$.*

PROPOSITION 5. *Soit $C$ une bigèbre* (resp. une bigèbre possédant une inversion $i$). *Alors $C$ est limite inductive filtrante de ses sous-bigèbres de type fini contenant* 1 (resp. et stables par $i$).

L'énoncé contenant les «resp.» équivaut à:

COROLLAIRE. *Le schéma en groupes $G$ associé à $C$ est limite projective filtrante de groupes algébriques linéaires.*

On va prouver un résultat plus précis. Soit $E$ un $C$-comodule (à droite, pour changer un peu) de rang fini et soit $C_E$ la sous-cogèbre de $C$ correspondante.