Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Kapitel: 3.5. Interprétation de G comme limite projective de groupes ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

Soit d'autre part $d' : C \otimes C \to C \otimes C \otimes C$ le coproduit du comodule $C \otimes C$. On vérifie sans difficulté que l'on a

$$d'(a \otimes b) = \sum_{i,j} a_i b_j \otimes x_i \otimes x_j ,$$

d'où

$$(**) \qquad \varphi_u(C \otimes C)(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i b_j) \otimes x_i \otimes x_j .$$

En comparant (*) et (**), on voit que $\varphi_u(C \otimes C) = \varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C)$ si u est un homomorphisme d'algèbres. Pour prouver la réciproque, choisissons pour $(x_i)_{i \in I}$ une base telle que $x_o = 1$ pour un élément $0 \in I$ et $e(x_i) = 0$ pour $i \neq 0$. On a alors $a_o = a$ et $b_o = b$, et l'égalité de (*) et (**) entraîne $u(a)u(b) = u(ab)$, ce qui achève la démonstration.

La prop. 4 est une conséquence immédiate des deux lemmes ci-dessus. En effet, un élément de $G(K_1)$ est *par définition* un homomorphisme d'algèbres $u : C \to K_1$ tel que $u(1) = 1$. La seule chose à vérifier, c'est que, pour tout comodule E, l'endomorphisme $u(E)$ de $K_1 \otimes E$ défini par u est égal à $\varphi_u(E)$: or c'est justement la définition de $u(E)$, cf. démonstration de la prop. 1.

Exemple. Prenons pour K_1 l'algèbre des *nombres duaux* sur K. La prop. 4 fournit alors un anti-isomorphisme de *l'algèbre de Lie* de G sur la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(\upsilon)$ formée des endomorphismes θ de υ tels que

$$\theta(K) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(E_1 \otimes E_2) = \theta(E_1) \otimes 1_{E_2} + 1_{E_1} \otimes \theta(E_2) .$$

3.5. Interprétation de G comme limite projective de groupes algébriques linéaires

DÉFINITION 2. *On dit que C est de type fini (ou que G est algébrique linéaire) si C est de type fini comme algèbre sur K.*

PROPOSITION 5. *Soit C une bigèbre* (resp. une bigèbre possédant une inversion i). *Alors C est limite inductive filtrante de ses sous-bigèbres de type fini contenant* 1 (resp. et stables par i).

L'énoncé contenant les «resp.» équivaut à:

COROLLAIRE. *Le schéma en groupes G associé à C est limite projective filtrante de groupes algébriques linéaires.*

On va prouver un résultat plus précis. Soit E un C-comodule (à droite, pour changer un peu) de rang fini et soit C_E la sous-cogèbre de C correspondante.

Pour tout $n \geqslant 0$, soit $C_E(n)$ la sous-cogèbre attachée au comodule $\overset{n}{\otimes} E$; pour $n = 0$, on convient comme d'ordinaire que $\overset{n}{\otimes} E = K$, de sorte que $C_E(0) = K.1$. On sait (cf. lemme 1) que

$$C_E(n) = C_E \dots C_E \quad (n \text{ facteurs}) .$$

Il en résulte que

$$C(E) = \sum_{n=0}^{\infty} C_E(n)$$

est la *sous-algèbre* de C engendrée par C_E et 1. D'où:

PROPOSITION 6. *L'algèbre $C(E)$ est une sous-bigèbre de C contenant 1 et de type fini; c'est la plus petite sous-bigèbre de C contenant 1 et C_E.*

Comme C est visiblement limite inductive des $C(E)$, cela démontre la première partie de la prop. 5. D'autre part, lorsque C possède une inversion i, la seconde partie de la prop. 5 résulte de la proposition plus précise (mais évidente) suivante:

PROPOSITION 7. *L'algèbre $C(E \oplus \check{E})$ est une sous-bigèbre de C contenant 1 et stable par i; c'est la plus petite sous-bigèbre de C ayant ces propriétés; elle est de type fini.*

Si l'on note X_E (resp. G_E) le monoïde (resp. groupe) algébrique linéaire associé à $C(E)$ (resp. à $C(E \oplus \check{E})$), on voit que l'on a

$$G = \varprojlim . X_E \quad (\text{resp. } G = \varprojlim . G_E) .$$

Remarques

1) La construction de $C(E \oplus \check{E})$ à partir de $C(E)$ peut aussi se faire de la manière suivante: au G-module E est associé un élément «déterminant» δ_E, qui est un élément inversible de C, contenu dans $C(E)$. On a:

$$C(E \oplus \check{E}) = C(E) \left[\frac{1}{\delta_E} \right] .$$

2) L'interprétation de X_E et G_E en termes de schémas est la suivante: X_E (resp. G_E) est le plus petit sous-schéma fermé du schéma End_E (resp. $\mathbf{GL}_E$) des endomorphismes (resp. automorphismes) de E contenant l'image de la représentation $\rho : G \to \mathrm{End}_E$ attachée à E. Cela se vérifie immédiatement sur la construction de l'algèbre affine de End_E (resp. G_E), construction que le rédacteur trouve inutile de reproduire.

DÉFINITION 3. *Soit* C *une bigèbre possédant une inversion. Un* C*-comodule* E *de rang fini est dit fidèle si* $C(E \oplus \check{E}) = C$.

Vu ce qui précède, E est fidèle si et seulement si $G \to G_E$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. *Si* E *est fidèle, toute représentation linéaire de* G *est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations* $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. *Tout* G*-module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un* $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.

Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par les représentations $\overset{n}{\otimes} E \overset{m}{\otimes} \det(E)^{-1}$, avec des notations évidentes.

2) Il se peut que G_E soit fermé dans End_E (et non pas seulement dans $\mathbf{GL}_E$), autrement dit que $C(E) = C(E \oplus \check{E})$. C'est le cas, par exemple, si G_E est contenu dans $\mathbf{SL}_E$. Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par celles de E.

§4. ENVELOPPES

4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit A une algèbre associative à élément unité. Soit S_d (resp. S_g, S) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans A. On a $S_d \cap S_g = S$ et S est *cofinal* à la fois dans S_d et dans S_g; en effet, si $\mathfrak{a} \in S_g$ par exemple, l'annulateur du A-module $A/\mathfrak{a}$ appartient à S et est contenu dans $\mathfrak{a}$.

On posera:

$$\hat{A} = \varprojlim . A/\mathfrak{a}$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant S. L'algèbre $\hat{A}$ est *l'algèbre profinie complétée* de A, pour la topologie définie par S (ou S_d, ou S_g, cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie