

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** BIRAPPORT ET GROUPOÏDES  
**Autor:** Cathelineau, Jean-Louis  
**Kapitel:** 3.1 HOMOLOGIE DU GROUPE MULTIPLICATIF D'UN CORPS ET ESPACE PROJECTIF INFINI  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$= \text{card}(F) + 1$  droites distinctes de  $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$  rencontrant  $X, Y, A$ , et  $B$ , mais  $\text{card}(\mathbf{P}^1(F)) > l$ , par hypothèse sur  $F$ . Il en résulte que  $f$  est diagonalisable et que les  $x_j$  sont en position générale dans  $X$ , car les  $D_j$  sont en somme directe.

On peut aussi montrer que les birapports  $\alpha_j$  donc aussi les  $c_j$  caractérisent, dans la situation ci-dessus, la configuration  $X, Y, A, B$  à transformation projective près.

### 3. HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

#### 3.1 HOMOLOGIE DU GROUPE MULTIPLICATIF D'UN CORPS ET ESPACE PROJECTIF INFINI

A la place des configurations de Menelaüs, on aurait pu utiliser dans la définition du groupoïde  $\mathcal{G}_n$  les configurations de Ceva comme sur la figure 8.

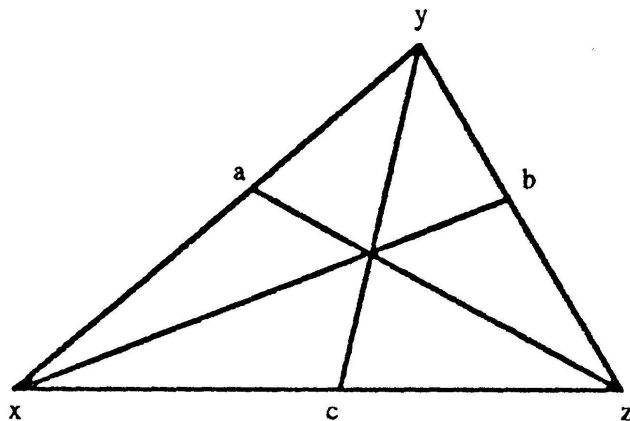


FIGURE 8

On rappelle que le théorème de Ceva exprime le fait que les droites  $\langle x, b \rangle$ ,  $\langle y, c \rangle$  et  $\langle z, a \rangle$  de la figure 8 sont concourrantes par la condition affine  $\frac{ax}{ay} \frac{by}{bz} \frac{cz}{cx} = -1$ .

**DÉFINITION 5.** On note  $\mathcal{G}'_n$  le groupoïde ainsi obtenu.

Le groupoïde  $\mathcal{G}'_n$  est isomorphe à  $\mathcal{G}_n$ . L'isomorphisme avec  $\mathcal{V}_n$  est d'ailleurs plus naturel que son analogue pour  $\mathcal{G}_n$ . Si  $F$  est de caractéristique 2, on a l'égalité  $\mathcal{G}'_n = \mathcal{G}_n$ ; en effet les points  $a, b, c$  de la figure 8 sont alors alignés et dans ce cas les configurations de Menelaüs et celles de Ceva coïncident. Noter aussi que sans hypothèse sur  $F$ , on obtient un isomorphisme entre  $\mathcal{G}_n$  et  $\mathcal{G}'_n$ , en termes de générateurs, en associant au générateur  $(x \xrightarrow{a} y)$  de  $\mathcal{G}_n$ , le générateur  $(x \xrightarrow{a'} y)$  de  $\mathcal{G}'_n$ , où  $a'$  est le

conjugué harmonique de  $a$  par rapport à  $x$  et  $y$ . Que cette correspondance soit compatible avec les relations se traduit par la figure 9. Il faut comprendre cette figure comme suit: si  $(x, y, a, a')$ ,  $(x, z, c, c')$  et  $(y, z, b, b')$  sont respectivement en division harmonique, alors la configuration des six points  $x, y, z, a, b, c$  est de Menelaüs si et seulement si la configuration  $x, y, z, a', b', c'$  est de Ceva; la preuve est un exercice.

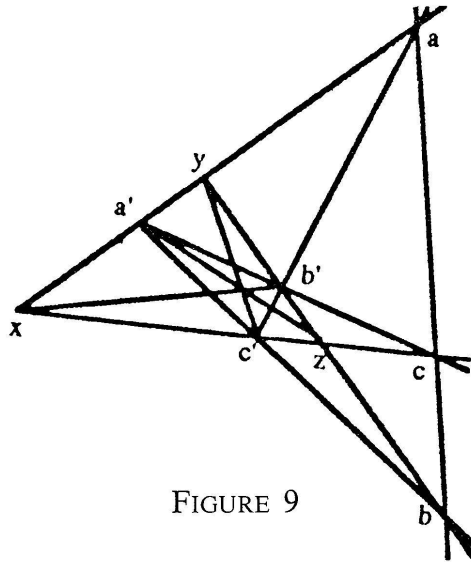


FIGURE 9

DÉFINITION 6. Soit  $\mathbf{P}^\infty(F)$  l'espace projectif associé au  $F$ -espace vectoriel de dimension dénombrable  $F^{(\mathbf{N})}$ . De manière analogue à  $\mathcal{G}'_n$ , on définit un groupoïde  $\mathcal{G}'_\infty$  dont les objets sont les points de  $\mathbf{P}^\infty(F)$ .

Ce groupoïde est limite inductive des  $\mathcal{G}'_n$ . Avant d'utiliser  $\mathcal{G}'_\infty$ , rappelons d'abord quelques généralités sur l'homologie des groupoïdes. A tout groupoïde  $\mathcal{G}$  et plus généralement à toute petite catégorie, on associe [15] son nerf  $\mathcal{N}\mathcal{G}$  qui est un ensemble simplicial. L'ensemble  $\mathcal{N}_n\mathcal{G}$  des  $n$ -simplexes de  $\mathcal{N}\mathcal{G}$  est formé des suites  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de morphismes dont deux successifs sont composables et les opérateurs de faces sont données par

$$\partial_0(f_1, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n)$$

$$\partial_n(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$$

$$\partial_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{n-1}), \text{ pour } i = 1, \dots, n - 1 .$$

L'homologie de  $\mathcal{G}$  est alors l'homologie du complexe

$$\dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_n\mathcal{G}] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_{n-1}\mathcal{G}] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_0\mathcal{G}] \rightarrow 0 ,$$

où  $\mathbf{Z}[\mathcal{N}_n\mathcal{G}]$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre engendré par les  $n$ -simplexes de  $\mathcal{G}$  et où  $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ .

En particulier, un groupe est un groupoïde et on retrouve l'homologie des groupes au sens usuel [2]. D'autre part, l'injection canonique dans  $\mathcal{G}$  de  $Aut(x)$ , considéré comme groupoïde à un seul objet, induit un isomorphisme

en homologie. En fait  $Aut(x)$  est équivalent au sens des catégories au groupoïde  $\mathcal{G}$ : pour voir ce point, on considère un morphisme de groupoïdes  $\mathcal{G} \rightarrow Aut(x)$  en choisissant pour tout  $y$  un morphisme  $f_y: x \rightarrow y$ , et en associant à  $g \in Aut(y)$  l'automorphisme de  $x: f_y^{-1} \circ g \circ f_y$ ; une telle équivalence induit une équivalence d'homotopie simpliciale sur les nerfs (voir [15]) d'où un isomorphisme en homologie.

Revenons au groupoïde  $\mathcal{G}'_\infty$ ; quelque soit l'objet  $x$  de  $\mathcal{G}'_\infty$ , le groupe  $Aut(x)$  est isomorphe au groupe multiplicatif  $F^\times$ . On va décrire un sous-complexe du complexe

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_n \mathcal{G}'_\infty] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_{n-1} \mathcal{G}'_\infty] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_0 \mathcal{G}'_\infty] \rightarrow 0,$$

de nature totalement géométrique et dont l'homologie est encore l'homologie de  $F^\times$ .

DÉFINITION 7. *On dit qu'un  $n$ -simplexe*

$$x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$$

*est générique si ses sommets  $(x_i)_{i=0 \dots n}$  sont en position générale dans  $\mathbf{P}^\infty(F)$ , c'est-à-dire s'ils engendrent un sous-espace projectif de dimension  $n$ .*

DÉFINITION 8. *Pour  $n > 0$ , on appelle  $n$ -repère projectif de  $\mathbf{P}^\infty(F)$  la donnée d'un  $(n+2)$ -uplet  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$  tel que le sous-espace projectif engendré soit de dimension  $n$  et tel que les points  $x_0, x_1, \dots, x_n, \omega$  soient en position générale dans  $\langle x_0, x_1, \dots, x_n, \omega \rangle$ . Un 0-repère est constitué d'un point. On note  $\mathcal{R}_n$  l'ensemble des  $n$ -repères projectifs de  $\mathbf{P}^\infty(F)$ .*

La donnée d'un  $n$ -simplexe générique  $x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$  équivaut à celle d'un  $n$ -repère projectif de  $\mathbf{P}^\infty(F)$ . La correspondance s'obtient comme suit: au  $n$ -simplexe générique  $x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$ , on associe le  $n$ -repère projectif  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$ , où  $\omega$  est l'intersection des sous-espaces  $\langle a_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ,  $\langle x_0, a_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ , ...,  $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, a_n \rangle$ . Inversement au  $n$ -repère  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$  correspond le  $n$ -simplexe générique  $x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$ , où les  $a_i$  sont définis par

$$a_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \cap \langle x_0, \dots, \widehat{x_{i-1}}, \widehat{x_i}, \dots, x_n, \omega \rangle.$$

Dans la correspondance, l'opérateur de face  $\partial_i$  devient

$$\partial_i(x_0, \dots, x_n, \omega) = (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n, \omega_i),$$

où  $\omega_i = \langle x_i, \omega \rangle \cap \langle x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n \rangle$ . La figure 10 illustre le cas d'un 2-simplexe.

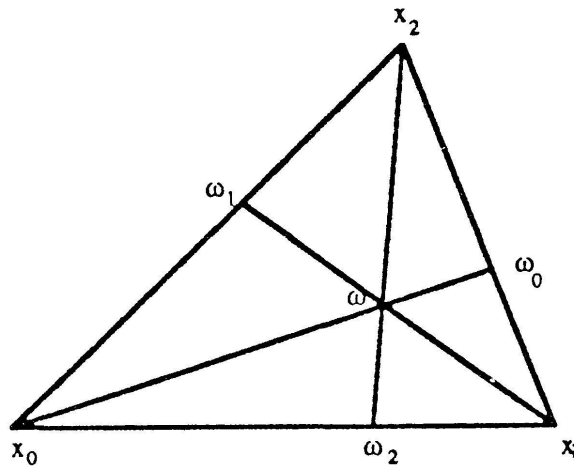


FIGURE 10

Le théorème suivant donne une description projective de l'homologie du groupe multiplicatif d'un corps à l'aide des  $n$ -repères projectifs de  $\mathbf{P}^\infty(F)$  (comparer avec [7] et la situation topologique classique [12]).

THÉORÈME 4. *L'homologie du complexe*

$$(1) \quad \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_n] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_{n-1}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_0] \rightarrow 0,$$

où  $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$  et où  $\partial_i$  est décrit géométriquement comme ci-dessus, est isomorphe à l'homologie  $H_*(F^\times, \mathbf{Z})$  de  $F^\times$ .

*Preuve.* On va utiliser la définition algébrique de l'homologie des groupes (voir [2]). Soit un groupe  $G$  et  $\mathbf{Z}[G]$  l'algèbre du groupe  $G$ , l'homologie  $H_*(G, \mathbf{Z})$  s'obtient à partir de n'importe quelle résolution de  $\mathbf{Z}$  par des  $\mathbf{Z}[G]$ -modules projectifs

$$\cdots \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow \mathbf{Z},$$

en considérant l'homologie du complexe des « coinvariants »

$$\cdots \rightarrow M_n \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z} \rightarrow M_{n-1} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z}.$$

Soit alors  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des  $(n + 1)$ -uplets  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs indépendants de  $F^{(N)}$ , on considère le complexe

$$(2) \quad \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_{n-1}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_0] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z},$$

où  $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ , avec  $\partial_i(v_0, \dots, v_n) = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$  et  $\varepsilon(\sum n_i(v_i)) = \sum n_i$ . Ce complexe est une résolution de  $\mathbf{Z}$  par des  $\mathbf{Z}[F^\times]$ -modules libres, où l'action de  $F^\times$  provient de l'action diagonale  $\lambda.(v_0, \dots, v_n)$

$= (\lambda v_0, \dots, \lambda v_n)$ . Pour l'acyclicité, on remarque que si  $d(\sum_i (v_0^i, \dots, v_n^i)) = 0$ , on peut choisir un vecteur  $v$  de  $F^{(N)}$  indépendant de tous les  $v_j^i$  et alors on vérifie que  $\sum_i (v_0^i, \dots, v_n^i) = d(\sum_i (v, v_0^i, \dots, v_n^i))$ . Pour terminer la preuve, il suffit d'observer que le complexe des coinvariants de (2), sous l'action de  $\mathbf{Z}[F^\times]$ , s'identifie au complexe (1); cela résulte du fait que les orbites de  $\mathcal{C}_n$  sous l'action de  $F^\times$  sont en bijection naturelle avec les éléments de  $\mathcal{R}_n$ ; en effet à l'orbite de l'élément  $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{C}_n$  est associé le  $n$ -repère projectif image de  $(v_0, v_1, \dots, v_n, \sum v_i)$  par  $p$ ; inversement soit un repère projectif  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$  et soit  $D_i$  la droite au-dessus de  $x_i$  et  $\Delta$  celle au-dessus de  $\omega$ , ce repère provient de l'orbite de  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ , où les  $v_i$  sont les éléments de la décomposition d'un vecteur de la droite  $\Delta$  dans la somme directe des  $D_i$ .  $\square$

Le groupe projectif  $GP(F^{(N)})$  opère dans le complexe (1) par

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f(\omega)).$$

L'action induite en homologie est triviale. Cela résulte d'un argument standard d'algèbre homologique (voir par exemple [2]); en effet cette action provient, par passage aux coinvariants, d'une action de  $GL(F^{(N)})$  dans la résolution (2), action qui est triviale sur  $\mathbf{Z}$  et coïncide avec l'action diagonale sur les éléments de  $\mathcal{C}_n$ ; noter que cette action commute avec celle de  $\mathbf{Z}[F^\times]$ .

### 3.2 HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET GRASSMANNIENNES INFINIES

On va esquisser une description géométrique analogue pour l'homologie du groupe linéaire  $GL(l, F)$  en utilisant les considérations du paragraphe 2. Relativement à la grassmannienne  $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$  des sous-espaces de dimension  $l - 1$  de  $\mathbf{P}^\infty(F)$ , on peut définir des groupoïdes  $\mathcal{G}_{\infty, l}$  et  $\mathcal{G}'_{\infty, l}$  analogues à  $\mathcal{G}_\infty$  et  $\mathcal{G}'_\infty$ . Pour  $n > 0$ ,  $\mathcal{R}_n^l$  désigne l'ensemble des  $(n + 2)$ -uplets  $(X_0, X_1, \dots, X_n, Y)$  d'éléments de  $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$  tels que  $n + 1$  d'entre eux soient en position générale dans  $\mathbf{P}^\infty(F)$  et  $Y$  est contenu dans le sous-espace  $\langle X_0, X_1, \dots, X_n \rangle$ : ces  $(n + 2)$ -uplets jouent le rôle des repères projectifs; on pose de plus  $\mathcal{R}_0^l = \mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ . On est conduit naturellement à la construction d'un complexe géométrique

$$(3) \quad \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_0^l] \rightarrow 0,$$

dont les groupes d'homologie coïncident avec ceux de  $GL(l, F)$ . Dans (3),  $\mathbf{Z}[\mathcal{R}_n^l]$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre de générateurs les éléments de  $\mathcal{R}_n^l$ , et  $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ , où

$$\partial_i(X_0, \dots, X_n, Y) = (X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n, Y_i),$$