Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIRAPPORT ET GROUPOÏDES

Autor: Cathelineau, Jean-Louis

Kapitel: 4. MULTIRAPPORTS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61827

4. Multirapports

4.1 Groupoïdes et n-rapports

Dans ce paragraphe, on fait quelques remarques sur des invariants liés au groupoïde $\mathcal{G}_m$ associé à l'espace projectif $\mathbf{P}^m(F)$. Notons $\check{\mathbf{P}}^m(F)$ le dual projectif de $\mathbf{P}^m(F)$. Si $(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un élément de $(\mathbf{P}^m(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^m(F))^n$ tel que $\vec{\varphi}_i(\vec{x}_j) \neq 0$, où $(\vec{\ })$ désigne un représentant vectoriel, on considère l'élément de $F^\times$

$$[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_1)\vec{\varphi}_2(\vec{x}_2) \ldots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_2)\vec{\varphi}_2(\vec{x}_3) \ldots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_1)} .$$

C'est un invariant projectif de la configuration constituée des n points x_i et des n hyperplans H_i associés aux φ_i. Remarquer que

$$[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(n)}] = [x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n] ,$$

pour tout élément σ du groupe engendré par le cycle $(12 \ldots n)$.

On appelle $[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ le n-rapport de cette configuration; on le note aussi $[x_1, \ldots, x_n; H_1, \ldots, H_n]$. Si $m = 1$ et $n = 2$, on a exactement

$$[x_1, x_2; y_1, y_2] = r(x_1, x_2; y_1, y_2) .$$

Pour $x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ comme ci-dessus, posons $a_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cap H_i$ pour $i \neq n$ et $a_n = \langle x_1, x_n \rangle \cap H_n$.

Proposition 4. *On a dans le groupoïde $\mathcal{G}_m$ l'interprétation géométrique suivante du n-rapport*

$$[x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 ,$$

où $f_i = x_i \overset{a_i}{\to} x_{i+1}$ *pour* $i \neq n$ *et* $f_n = x_{n+1} \overset{a_n}{\to} x_1$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'application linéaire $p^{-1}(x_i) \to p^{-1}(x_{i+1})$ dont le graphe est conjugué harmonique de $p^{-1}(a_i)$ par rapport à $p^{-1}(x_i)$ et $p^{-1}(x_{i+1})$ associe à $\vec{x}_i$ le vecteur $\frac{\vec{\varphi}_i(\vec{x}_i)}{\vec{\varphi}_{i+1}(\vec{x}_{i+1})} \vec{x}_{i+1}$. □

Montrons sur un exemple comment les n-rapports apparaissent naturellement dans certains invariants projectifs. Soit V un F-espace vectoriel de dimension finie et V^* son dual, si $\sigma \in S_n$ est une permutation, l'application multilinéaire

$$I_\sigma : V^n \times (V^*)^n \to F$$

$$(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_i(\vec{x}_{\sigma(i)})$$

est invariante sous l'action diagonale de $GL(V)$ dans $V^n \times (V^*)^n$ (il est bien connu [14] que ces fonctions jouent un rôle en théorie des invariants). Par suite, si $(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sont comme précédemment et si $\sigma, \mu \in S_n$, on obtient un invariant projectif $J_{\sigma,\mu}$ à valeurs dans $F^\times$ en posant

$$J_{\sigma,\mu}(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \frac{I_\sigma(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n)}{I_\mu(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n)}$$

Soit alors

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k)(j_1, j_2, \cdots, j_l) \cdots (t_1, t_2, \cdots, t_s)$$

la décomposition en cycles de la permutation $\sigma^{-1}\mu$, on vérifie facilement la relation

$$J_{\sigma,\mu}(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = [x_{\sigma(i_1)}, \ldots, x_{\sigma(i_k)}; \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}] \,.$$
$$[x_{\sigma(j_1)}, \ldots, x_{\sigma(j_l)}; \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_l}] \cdots [x_{\sigma(t_1)}, \ldots, x_{\sigma(t_s)}; \varphi_{t_1}, \ldots, \varphi_{t_s}] \,.$$

4.2 Remarques sur un invariant de Goncharov

Considérons $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, $2n$ points en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ et posons

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]] = [x_1, \ldots, x_n; H_1, \ldots, H_n] \,,$$

où H_i est l'hyperplan $\langle y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n \rangle$; on obtient un invariant projectif qui vérifie en particulier

$$[[x_1, x_2; y_1, y_2]] = (r(x_1, x_2; y_1, y_2))^{-1} \,.$$

Soit «dét» le déterminant dans une base arbitraire de F^{n+1}, d'après la définition du n-rapport, on peut écrire

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]] = \frac{\prod_{i=1}^n \mathit{dét}(\vec{y}_1, \ldots, \hat{\vec{y}}_i, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_i)}{\prod_{i=1}^n \mathit{dét}(\vec{y}_1, \ldots, \hat{\vec{y}}_i, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{\tau(i)})} \,,$$

où τ est la permutation cyclique $(12\ldots n)$; en particulier si on prend comme coordonnées homogènes de $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{matrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \,, \end{matrix}$$

on a l'expression

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]] = \frac{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}{a_{12}a_{23}\cdots a_{n1}} \,.$$

Soit $\mathbf{Z}[F^\times]$ l'algèbre du groupe multiplicatif de F. On définit un invariant projectif de $2n$ points $x_1, \ldots, x_{2n}$ en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ en posant dans $\mathbf{Z}[F^\times]$

$$\tilde{r}_n(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon_\sigma [[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(2n)}]] .$$

Pour $n = 3$ on retrouve l'invariant de 6 points du plan projectif $\mathbf{P}^2(F)$ considéré par Goncharov dans son travail sur la conjecture de Zagier [8].

La proposition 4 montre que, pour $n = 3$, $[[x_1, \ldots, x_6]]$ s'interprète dans le groupoïde $\mathscr{G}_2$ comme la composée $f_3 \circ f_2 \circ f_1$, où $f_1 = x_1 \xrightarrow{a_1} x_2$, $f_2 = x_2 \xrightarrow{a_2} x_3$, $f_3 = x_3 \xrightarrow{a_3} x_1$ et les points a_i sont comme sur la figure 11.

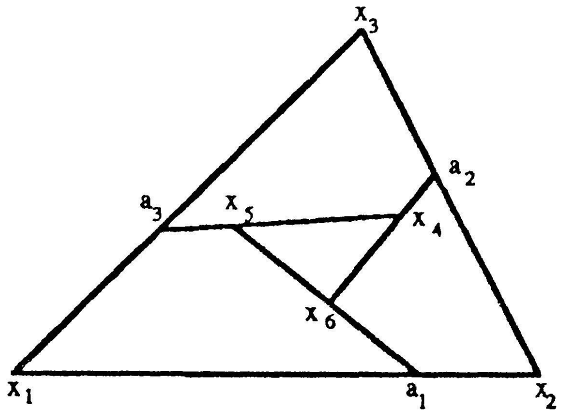

FIGURE 11

On aurait pu aussi procéder en s'inspirant de la figure 12, c'est-à-dire poser

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]]' = [x_1, \ldots, x_n; L_1, \ldots, L_n] ,$$

où L_i est l'hyperplan $\langle y_i, x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \widehat{x_{i+1}}, \ldots, x_n \rangle$, où $x_{n+1} \equiv x_1$ et définir l'invariant projectif de $2n$ points

$$\tilde{r}'_n(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon_\sigma [[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(2n)}]]' .$$

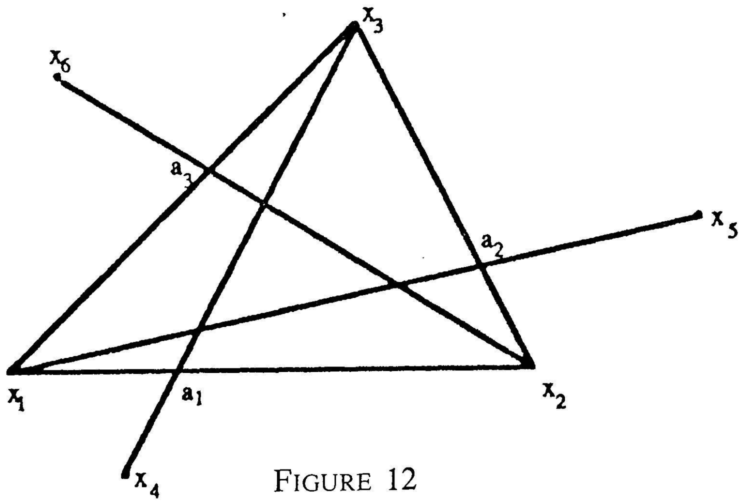

FIGURE 12

Ces deux invariants sont essentiellement les mêmes.

Proposition 5. *Considérons l'involution de* $\mathbf{Z}[F^\times]$ *donnée par*

$$\lambda_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n-1}\mu_n$$

où μ_n *est l'involution de* $\mathbf{Z}[F^\times]$ *provenant de la multiplication par* $(-1)^n$ *dans* $F^\times$, *on a*

$$\tilde{r}'_n = \lambda_n \circ \tilde{r}_n \, .$$

Preuve. Pour simplifier on posera

$$|j_1, \ldots, j_n| := \textit{dét}(\vec{x}_{j_1}, \ldots, \vec{x}_{j_n}) \, .$$

On a la relation

$$\frac{|n+1,3,\ldots,n,1| \ldots |n+i,1,\ldots,\hat{i},\widehat{i+1},\ldots,n,i| \ldots |2n,2,\ldots,n-1,n|}{|n+1,3,\ldots,n,2| \ldots |n+i,1,\ldots,\hat{i},\widehat{i+1},\ldots,n,i+1| \ldots |2n,2,\ldots,n-1,1|}$$

$$= (-1)^n \frac{|1,3,\ldots,n,n+1| \ldots |1,\ldots,\widehat{i+1},\ldots,n,n+i| \ldots |2,\ldots,n,2n|}{|2,3,\ldots,n,n+1| \ldots |1,\ldots,\hat{i},\ldots,n,n+i| \ldots |1,2,\ldots,n-1,2n|}$$

$$= (-1)^n \frac{|2,3,\ldots,n,2n| \ldots |1,\ldots,\widehat{i+1},\ldots,n,n+i| \ldots |1,\ldots,n-1,2n-1|}{|2,3,\ldots,n,n+1| \ldots |1,\ldots,\widehat{i+1},\ldots,n,n+i+1| \ldots |1,\ldots,n-1,2n|} .$$

Par suite,

$$[[x_1, \ldots, x_{2n}]]' = (-1)^n [[x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(2n)}]] \, ,$$

où τ est la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & \ldots & 2n \\ 2n & n+1 & \ldots & 2n-1 & 1 & \ldots & n \end{pmatrix} .$$

La signature de τ est égale à $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n-1}$, d'où la proposition. $\square$

On voit que si $\omega : \mathbf{Z}[F^\times] \to F$ est le morphisme de $\mathbf{Z}$-modules déduit de l'injection de $F^\times$ dans F, alors $\omega \circ \tilde{r}_n = 0$ pour $n \equiv 0, 3 \pmod 4$; l'analogue classique de l'invariant de Goncharov $\tilde{r}_3$ est donc trivial.

Dans la preuve de la conjecture de Zagier, pour $n = 2$ et 3, l'invariant $\tilde{r}_n$ est couplé au n-logarithme (voir [9, 8, 4]); l'analogue pour $n > 3$ est une question intéressante qui reste mystérieuse.

Après soumission de cet article, j'ai appris l'existence de deux preprints qui considèrent aussi la catégorie des points de l'espace projectif. Elle semble avoir été introduite par Koch [11] dans une courte note ancienne et non publiée; Diers et Leroy [5] l'utilisent pour retrouver des résultats classiques de géométrie. Les résultats qui précèdent sont indépendants de ces articles.

RÉFÉRENCES

[1] BERGER, M. *Géométrie,* 5 volumes, Editions Cedic, 1977-78.

[2] BROWN, K.S. *Cohomology of groups.* Grad. Texts in Math., Springer-Verlag 1982.

[3] BROWN, R. From groups to groupoids: a brief survey. Bull. London Math. Soc. 19 (1987), 113-134.

[4] CATHELINEAU, J.L. Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes. Sém. Bourbaki 1992/93 exp. 772. *Astérisque 216* (1933), 311-341.

[5] DIERS, Y. et J. LEROY. Catégorie des points d'un espace projectif. *Cahiers de Géométrie Différentielle 35* (1994), 2-29.

[6] FULTON, W. *Intersection Theory.* Springer Verlag, 1984.

[7] JARDINE, J.F. Geometric Models for the K-Theory of Fields. *J. of Algebra 84* (1983), 220-239.

[8] GONCHAROV, A.B. Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology. *Adv. in Math. 114* (1995), 197-318.

[9] —— Polylogarithms and motivic Galois groups. Proc. of the Seattle conf. on motives, Seattle July 1991. *A.M.S. Proc. Symp. in Pure Math. 55* (1994) 2, 43-96.

[10] GREENBERG, P. Triangulating groups, two examples. Preprint, Grenoble 1992.

[11] GRIFFITH, Ph. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wyley and Sons, 1978.

[12] HUSEMOLLER, D. *Fibre Bundles.* Grad. Texts in Math., Springer Verlag, 1975.

[13] KOCK, A. The category aspect of projective space. Aarhus Universitet, preprint 1974.

[14] PROCESI, C. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Adv. in Math. 19* (1976), 306-381.

[15] SEGAL, G. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. I.H.E.S. 34* (1968), 105-112.

[16] SUSLIN, A.A. *Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory.* Springer Lect. Notes in Math. 1046 (1989), 357-375.

(Reçu le 12 octobre 1994)

Jean-Louis Cathelineau

Laboratoire Jean Dieudonné
URA CNRS 168
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2
France