Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIRAPPORT ET GROUPOÏDES
Autor: Cathelineau, Jean-Louis
Kapitel: 4.1 GROUPOÏDES ET n-RAPPORTS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61827

4. MULTIRAPPORTS

4.1 GROUPOÏDES ET n-RAPPORTS

Dans ce paragraphe, on fait quelques remarques sur des invariants liés au groupoïde $\mathcal{G}_m$ associé à l'espace projectif $\mathbf{P}^m(F)$. Notons $\check{\mathbf{P}}^m(F)$ le dual projectif de $\mathbf{P}^m(F)$. Si $(x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_n)$ est un élément de $(\mathbf{P}^m(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^m(F))^n$ tel que $\vec{\varphi}_i(\vec{x}_j) \neq 0$, où $(\vec{\ })$ désigne un représentant vectoriel, on considère l'élément de $F^\times$

$$[x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_1)\vec{\varphi}_2(\vec{x}_2) \ldots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_2)\vec{\varphi}_2(\vec{x}_3) \ldots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_1)} .$$

C'est un invariant projectif de la configuration constituée des n points x_i et des n hyperplans H_i associés aux φ_i. Remarquer que

$$[x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, ..., \varphi_{\sigma(n)}] = [x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_n] ,$$

pour tout élément σ du groupe engendré par le cycle $(12 \ldots n)$.

On appelle $[x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_n]$ le n-rapport de cette configuration; on le note aussi $[x_1, ..., x_n; H_1, ..., H_n]$. Si $m = 1$ et $n = 2$, on a exactement

$$[x_1, x_2; y_1, y_2] = r(x_1, x_2; y_1, y_2) .$$

Pour $x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_n$ comme ci-dessus, posons $a_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cap H_i$ pour $i \neq n$ et $a_n = \langle x_1, x_n \rangle \cap H_n$.

PROPOSITION 4. *On a dans le groupoïde* $\mathcal{G}_m$ *l'interprétation géométrique suivante du n-rapport*

$$[x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 ,$$

où $f_i = x_i \overset{a_i}{\to} x_{i+1}$ *pour* $i \neq n$ *et* $f_n = x_{n+1} \overset{a_n}{\to} x_1$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'application linéaire $p^{-1}(x_i) \to p^{-1}(x_{i+1})$ dont le graphe est conjugué harmonique de $p^{-1}(a_i)$ par rapport à $p^{-1}(x_i)$ et $p^{-1}(x_{i+1})$ associe à $\vec{x}_i$ le vecteur $\frac{\vec{\varphi}_i(\vec{x}_i)}{\vec{\varphi}_{i+1}(\vec{x}_{i+1})} \vec{x}_{i+1}$. □

Montrons sur un exemple comment les n-rapports apparaissent naturellement dans certains invariants projectifs. Soit V un F-espace vectoriel de dimension finie et V^* son dual, si $\sigma \in S_n$ est une permutation, l'application multilinéaire

$$I_\sigma : V^n \times (V^*)^n \to F$$

$$(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, ..., \vec{\varphi}_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_i(\vec{x}_{\sigma(i)})$$

est invariante sous l'action diagonale de $GL(V)$ dans $V^n \times (V^*)^n$ (il est bien connu [14] que ces fonctions jouent un rôle en théorie des invariants). Par suite, si $(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sont comme précédemment et si $\sigma, \mu \in S_n$, on obtient un invariant projectif $J_{\sigma,\mu}$ à valeurs dans $F^\times$ en posant

$$J_{\sigma,\mu}(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \frac{I_\sigma(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n)}{I_\mu(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n)}$$

Soit alors

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k)(j_1, j_2, \cdots, j_l) \cdots (t_1, t_2, \cdots, t_s)$$

la décomposition en cycles de la permutation $\sigma^{-1}\mu$, on vérifie facilement la relation

$$J_{\sigma,\mu}(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = [x_{\sigma(i_1)}, \ldots, x_{\sigma(i_k)}; \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}] \cdot$$
$$[x_{\sigma(j_1)}, \ldots, x_{\sigma(j_l)}; \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_l}] \cdots [x_{\sigma(t_1)}, \ldots, x_{\sigma(t_s)}; \varphi_{t_1}, \ldots, \varphi_{t_s}] \,.$$

4.2 Remarques sur un invariant de Goncharov

Considérons $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, $2n$ points en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ et posons

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]] = [x_1, \ldots, x_n; H_1, \ldots, H_n] \,,$$

où H_i est l'hyperplan $\langle y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n \rangle$; on obtient un invariant projectif qui vérifie en particulier

$$[[x_1, x_2; y_1, y_2]] = (r(x_1, x_2; y_1, y_2))^{-1} \,.$$

Soit «dét» le déterminant dans une base arbitraire de F^{n+1}, d'après la définition du n-rapport, on peut écrire

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]] = \frac{\prod_{i=1}^n dét(\vec{y}_1, \ldots, \hat{\vec{y}}_i, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_i)}{\prod_{i=1}^n dét(\vec{y}_1, \ldots, \hat{\vec{y}}_i, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{\tau(i)})} \,,$$

où τ est la permutation cyclique $(12\ldots n)$; en particulier si on prend comme coordonnées homogènes de $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_{11} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & . & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \,,
\end{array}$$

on a l'expression

$$[[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n]] = \frac{a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{12}a_{23} \cdots a_{n1}} \,.$$