

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** BIRAPPORT ET GROUPOÏDES  
**Autor:** Cathelineau, Jean-Louis  
**Kapitel:** 4.1 GROUPOÏDES ET n-RAPPORTS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 4. MULTIRAPPORTS

4.1 GROUPOÏDES ET  $n$ -RAPPORTS

Dans ce paragraphe, on fait quelques remarques sur des invariants liés au groupoïde  $\mathcal{G}_m$  associé à l'espace projectif  $\mathbf{P}^m(F)$ . Notons  $\check{\mathbf{P}}^m(F)$  le dual projectif de  $\mathbf{P}^m(F)$ . Si  $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un élément de  $(\mathbf{P}^m(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^m(F))^n$  tel que  $\vec{\varphi}_i(\vec{x}_j) \neq 0$ , où  $(\vec{\quad})$  désigne un représentant vectoriel, on considère l'élément de  $F^\times$

$$[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_1) \vec{\varphi}_2(\vec{x}_2) \dots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_2) \vec{\varphi}_2(\vec{x}_3) \dots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_1)}.$$

C'est un invariant projectif de la configuration constituée des  $n$  points  $x_i$  et des  $n$  hyperplans  $H_i$  associés aux  $\varphi_i$ . Remarquer que

$$[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}] = [x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n],$$

pour tout élément  $\sigma$  du groupe engendré par le cycle  $(12 \dots n)$ .

On appelle  $[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n]$  le  $n$ -rapport de cette configuration; on le note aussi  $[x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n]$ . Si  $m = 1$  et  $n = 2$ , on a exactement

$$[x_1, x_2; y_1, y_2] = r(x_1, x_2; y_1, y_2).$$

Pour  $x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n$  comme ci-dessus, posons  $a_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cap H_i$  pour  $i \neq n$  et  $a_n = \langle x_1, x_n \rangle \cap H_n$ .

PROPOSITION 4. *On a dans le groupoïde  $\mathcal{G}_m$  l'interprétation géométrique suivante du  $n$ -rapport*

$$[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1,$$

où  $f_i = x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$  pour  $i \neq n$  et  $f_n = x_{n+1} \xrightarrow{a_n} x_1$ .

*Preuve.* Il suffit de remarquer que l'application linéaire  $p^{-1}(x_i) \rightarrow p^{-1}(x_{i+1})$  dont le graphe est conjugué harmonique de  $p^{-1}(a_i)$  par rapport à  $p^{-1}(x_i)$  et  $p^{-1}(x_{i+1})$  associe à  $\vec{x}_i$  le vecteur  $\frac{\vec{\varphi}_i(\vec{x}_i)}{\vec{\varphi}_{i+1}(\vec{x}_{i+1})} \vec{x}_{i+1}$ .  $\square$

Montrons sur un exemple comment les  $n$ -rapports apparaissent naturellement dans certains invariants projectifs. Soit  $V$  un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie et  $V^*$  son dual, si  $\sigma \in S_n$  est une permutation, l'application multilinéaire

$$I_\sigma: V^n \times (V^*)^n \rightarrow F$$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \vec{\varphi}_i(\vec{x}_{\sigma(i)})$$

est invariante sous l'action diagonale de  $GL(V)$  dans  $V^n \times (V^*)^n$  (il est bien connu [14] que ces fonctions jouent un rôle en théorie des invariants). Par suite, si  $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  sont comme précédemment et si  $\sigma, \mu \in S_n$ , on obtient un invariant projectif  $J_{\sigma, \mu}$  à valeurs dans  $F^\times$  en posant

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{I_\sigma(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}{I_\mu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}$$

Soit alors

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) (j_1, j_2, \dots, j_l) \cdots (t_1, t_2, \dots, t_s)$$

la décomposition en cycles de la permutation  $\sigma^{-1}\mu$ , on vérifie facilement la relation

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = [x_{\sigma(i_1)}, \dots, x_{\sigma(i_k)}; \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}] \cdot [x_{\sigma(j_1)}, \dots, x_{\sigma(j_l)}; \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_l}] \cdots [x_{\sigma(t_1)}, \dots, x_{\sigma(t_s)}; \varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_s}] .$$

#### 4.2 REMARQUES SUR UN INVARIANT DE GONCHAROV

Considérons  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 2n$  points en position générale de  $\mathbf{P}^{n-1}(F)$  et posons

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = [x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n] ,$$

où  $H_i$  est l'hyperplan  $\langle y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n \rangle$ ; on obtient un invariant projectif qui vérifie en particulier

$$[[x_1, x_2; y_1, y_2]] = (r(x_1, x_2; y_1, y_2))^{-1} .$$

Soit «dét» le déterminant dans une base arbitraire de  $F^{n+1}$ , d'après la définition du  $n$ -rapport, on peut écrire

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{\prod_{i=1}^n \det(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_i)}{\prod_{i=1}^n \det(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{\tau(i)})} ,$$

où  $\tau$  est la permutation cyclique  $(12 \dots n)$ ; en particulier si on prend comme coordonnées homogènes de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix} ,$$

on a l'expression

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{12} a_{23} \cdots a_{n1}} .$$