

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX. APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX  
**Autor:** Bergé, Anne-Marie / Martinet, Jacques  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61830>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX.  
APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX

par Anne-Marie BERGÉ et Jacques MARTINET<sup>1</sup>

RÉSUMÉ. On s'intéresse dans cet article à la densité des empilements de sphères associés à des familles de réseaux qui se déduisent de l'un d'entre eux par l'action d'un sous-groupe fermé du groupe linéaire. La théorie des groupes de Lie permet de donner une caractérisation à la Voronoï des maxima locaux de densité, recouvrant de très nombreuses situations étudiées auparavant. On applique ensuite ces méthodes à l'étude des réseaux isoduaux récemment définis par Conway et Sloane.

ABSTRACT. We study in this paper the density of sphere packings arising from families of lattices which consist in the orbit of one of them under the action of a closed subgroup of the linear group. The theory of Lie groups yields a characterization "à la Voronoï" of the local maxima of density which contains many previously known examples. These methods are then applied to isodual lattices, recently defined by Conway and Sloane.

1. INTRODUCTION

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , et soit  $\mathcal{R}$  l'espace des réseaux de  $E$ , muni de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages d'un réseau  $L$  s'obtient en associant à tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\text{Id}$  dans  $\text{Gl}(E)$  l'ensemble des réseaux  $u(L)$ ,  $u \in \mathcal{V}$ . Pour  $x \in E$ , la norme de  $x$  est  $N(x) = x \cdot x$  (le carré de la norme euclidienne). À toute base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ , on associe sa *matrice de Gram*  $\text{Gram}(\mathcal{B}) = ((e_i \cdot e_j))$ . L'invariant d'Hermite d'un réseau  $L$  est  $\gamma(L) = N(L) \det(L)^{-1/n}$ , où  $N(L) = \inf_{x \in L, x \neq 0} N(x)$  est la *norme* ou *minimum* de  $L$  et  $\det(L)$  est le *déterminant de  $L$*  (déterminant de la matrice de Gram d'une base de  $L$ );  $\gamma(L)$  ne dépend que de la classe de similitude de  $L$ , et  $\gamma^{n/2}(L)$  est proportionnel à la densité de l'empilement de sphères associé à  $L$ ;  $\gamma_n = \sup_{L \in \mathcal{R}} \gamma(L)$  est la *constante d'Hermite pour la dimension  $n$* .

---

<sup>1</sup> Membres du laboratoire U.M.R. 9936 du C.N.R.S.

Nous étudions ici la densité dans des familles  $\mathcal{F}$  de réseaux qui sont des orbites sous l'action d'un sous-groupe fermé  $\mathcal{G}$  du groupe linéaire  $\text{Gl}(E)$ , dont nous utilisons la structure de groupe de Lie. Un certain nombre de questions, classiques lorsqu'il s'agit de la famille  $\mathcal{R}$  de tous les réseaux de  $E$ , se posent naturellement. La première est celle de la détermination des *réseaux extrêmes pour  $\mathcal{F}$* , c'est-à-dire des réseaux de  $\mathcal{F}$  sur lesquels l'invariant d'Hermite atteint un maximum local parmi les réseaux de  $\mathcal{F}$ , et en particulier la recherche des *réseaux critiques pour  $\mathcal{F}$* , sur lesquels l'invariant d'Hermite atteint son maximum absolu  $\gamma(\mathcal{F})$ . L'existence de réseaux critiques n'est pas évidente *a priori*, mais se démontre souvent facilement en utilisant le théorème de compacité de Mahler, ce qui justifie que l'on entreprenne le calcul de  $\gamma(\mathcal{F})$  en déterminant tous les réseaux extrêmes.

Il est utile de disposer d'une caractérisation commode des réseaux extrêmes pour  $\mathcal{F}$ , analogue à celle de Voronoï dans le cas classique, faisant intervenir les notions de réseaux «parfaits» et «eutactiques». On est amené à considérer une notion plus restrictive que l'extrémalité, à savoir celle de *réseaux strictement extrêmes pour  $\mathcal{F}$* : il s'agit des réseaux  $L$  possédant un voisinage dans  $\mathcal{F}$  sur lequel l'invariant d'Hermite est strictement inférieur à celui de  $L$  sauf lorsqu'il s'agit d'un réseau semblable à  $L$ . Cette propriété, qui est vérifiée dans le cas classique où l'on a  $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ , n'est toutefois pas générale. Nous avons rencontré des contre-exemples dans certaines familles de réseaux isoduaux; un exemple est décrit à la fin du §4, dans lequel  $\gamma$  est constant sur une variété de réseaux (modulo similitude) de dimension 2.

Les notions de perfection et d'eutaxie que nous utilisons sont relatives, comme dans [B-M-S], à un sous-espace vectoriel  $\mathcal{C}$  de l'espace  $\text{End}^s(E)$  des endomorphismes symétriques de  $E$  associé de façon naturelle à la famille  $\mathcal{F}$ .

On peut sans inconvénient faire la théorie dans le cas d'un groupe  $\mathcal{G}$  connexe. Pour une telle famille, l'espace  $\mathcal{C}$  se définit par le procédé suivant. Notons  ${}^t u$  le transposé de  $u \in \text{Gl}(E)$ . Comme  $\mathcal{G}$  est un sous-groupe de Lie de  $\text{Gl}(E)$  (Bourbaki, Lie III. §8, th. 2), l'application  $u \mapsto {}^t u u$  de  $\mathcal{G}$  dans  $\text{Gl}(E)$  a pour image une sous-variété  $X$  à la fois de  $\text{Gl}(E)$  et de l'espace vectoriel  $\text{End}^s(E)$  des endomorphismes symétriques de  $E$ . L'espace tangent à  $X$  en l'identité est le sous-espace vectoriel  $\mathcal{C}$  de  $\text{End}^s(E)$  cherché. Dans les applications,  $\mathcal{G}$  est stable par transposition, et  $X$  est alors une sous-variété du groupe  $\mathcal{G}$  lui-même.

Des exemples sont examinés au §2, concernant notamment les  $G$ -réseaux au sens de [B-M2] (exemple qui contient le cas usuel de tous les réseaux de  $E$ ), les réseaux dual-extrêmes au sens de [B-M1], et les réseaux isoduaux

(notion introduite par Conway et Sloane dans l'appendice de [B-S], voir aussi [C-S3]).

La caractérisation des réseaux strictement extrêmes est l'objet des §§ 3 et 4.

Le § 5 est consacré à une classification des réseaux de la famille  $\mathcal{F}$  selon la configuration de leurs vecteurs minimaux. On en déduit la finitude du nombre de réseaux extrêmes (modulo similitudes) dans le cas des  $G$ -réseaux (résultat obtenu antérieurement par Jaquet dans [Ja]) et dans celui des réseaux isoduaux.

Les réseaux isoduaux sont l'objet des §§ 6 à 8. On étudie plus particulièrement au § 7 les notions de réseaux isoduaux symplectiques et orthogonaux (la première notion est celle de [C-S2]), et l'on classe au § 8 jusqu'à la dimension 4 les réseaux symplectiques qui sont extrêmes en tant que réseaux isoduaux. La méthode utilisée repose sur l'introduction au § 6 de la notion plus générale de *réseau normal* (cf. déf. 6.5).

Les auteurs remercient Christophe Bavard pour ses remarques.

## 2. EXEMPLES

Soit  $\mathcal{G}$  un sous-groupe fermé de  $\mathrm{Gl}(E)$  et soit  $L_0$  un réseau de  $E$ . La constante d'Hermite prend les mêmes valeurs sur les images de  $L_0$  par  $\mathcal{G}$  et par le groupe  $\mathbf{R}^*\mathcal{G}$  engendré par  $\mathcal{G}$  et les homothéties positives. Si  $\mathcal{G}$  contient les homothéties positives, soit  $\mathcal{G}'$  son sous-groupe formé des éléments de déterminant  $\pm 1$ . Alors, on a  $\mathcal{G} = \mathbf{R}_+^* \mathcal{G}'$ , et ce produit est direct, si bien que  $\mathcal{G}$  est connexe si et seulement si  $\mathcal{G}'$  l'est. Pour l'étude de l'invariant d'Hermite, il est indifférent de considérer  $\mathcal{G}$  ou  $\mathcal{G}'$ , et ce dernier choix permet de se restreindre aux réseaux de déterminant 1.

L'une des formes du *théorème de compacité de Mahler* est l'assertion suivante: *une famille de réseaux de déterminants bornés et de normes minorées par une constante strictement positive est d'adhérence compacte*. Soit  $\mathcal{F}$  une famille de réseaux de la forme  $\mathcal{G}L_0$  pour un groupe comme ci-dessus et soit  $\gamma = \sup_{L \in \mathcal{F}} \gamma(L)$ . Soit  $L_p$  une suite de réseaux de  $\mathcal{F}$  sur laquelle  $\gamma(L_p)$  tend vers  $\gamma$ . Si  $\mathcal{G}$  est de déterminant 1, le théorème de compacité de Mahler s'applique à la suite  $L_p$ , dont on peut extraire une sous-suite convergente dans  $\mathcal{R}$ , et le cas d'un groupe contenant les homothéties positives se ramène au précédent. Si la famille  $\mathcal{F}$  est fermée dans  $\mathcal{R}$ , ce qui est le cas dans les exemples ci-dessous, puisque  $\mathcal{G}$  est fermé dans  $\mathrm{Gl}(E)$ , la borne  $\gamma$  est alors atteinte sur  $\mathcal{F}$  et l'existence de réseaux critiques pour  $\mathcal{F}$  est assurée.