Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX. APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX

Autor: Bergé, Anne-Marie / Martinet, Jacques

Kapitel: 4. EXTRÉMALITÉ DANS F

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61830

C'est ainsi que l'ensemble fini S est $\mathscr{E}$-parfait (resp. $\mathscr{E}$-eutactique) si et seulement si les $\mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(p_x)$, $x \in S$, engendrent $\mathscr{E}$ (resp. s'il existe des coefficients ρ_x tous strictement positifs tels que $\mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(\mathrm{Id}) = \sum_x \rho_x \mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(p_x)$).

4. Extrémalité dans $\mathscr{F}$

Pour faire une étude locale de la fonction d'Hermite dans la famille $\mathscr{F}$, on établit quelques résultats préliminaires relatifs à l'espace $\mathrm{End}^s(E)$ des endomorphismes symétriques de E, dont on note $\|\,.\,\|$ une norme.

On rappelle que l'on note exp l'application exponentielle de $\mathrm{End}(E)$ dans $\mathrm{Gl}(E)$; par restriction, elle induit un difféomorphisme de $\mathrm{End}^s(E)$ sur l'ensemble des automorphismes symétriques positifs de E.

Les deux énoncés suivants concernent le déterminant et la norme d'un réseau. Le premier, qui se démontre par un calcul de valeurs propres, est bien connu:

4.1. Lemme. *Pour tout* $v \in \mathrm{End}^s(E)$, *on a* $\det(\exp v) = e^{\mathrm{Tr}(v)}$.

4.2. Lemme.

(i) *Soit* $u \in \mathrm{Gl}(E)$ *et soit* $x \in E$. *On a* $N(u(x)) = N(x) + \varphi_x({}^t uu - \mathrm{Id})$.

(ii) *Pour tout* $v \in \mathrm{End}^s(E)$, *pour tout* $x \in E$, *on a* $\varphi_x(\exp(v) - \mathrm{Id}) \geqslant \varphi_x(v)$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* $v(x) = 0$ *(et alors les deux membres sont nuls).*

(iii) *Soit* S *un ensemble fini de vecteurs non nuls de* E *et soit* F *un cône fermé de* $\mathrm{End}^s(E)$ *tel que, pour tout* $v \neq 0$ *appartenant à* F, *le minimum* $\min_{x \in S} \varphi_x(v)$ *soit négatif. Alors, il existe* $\alpha > 0$ *tel que, pour tout* $v \in F$ *avec* $0 < \|v\| < \alpha$, *on ait* $\min_{x \in S} \varphi_x(\exp(v) - \mathrm{Id}) < 0$.

(iv) *Soit* L *un réseau et soit* S *l'ensemble de ses vecteurs minimaux. Pour* $u \in \mathrm{Gl}(E)$ *assez voisin de l'identité, on a* $N(u(L)) = N(L) + \min_{x \in S} \varphi_x({}^t uu - \mathrm{Id})$.

Démonstration. (i) On a

$$u(x)\,.\,u(x) - x\,.\,x = {}^t uu(x)\,.\,x - x\,.\,x = ({}^t uu - \mathrm{Id})\,(x)\,.\,x = \varphi_x({}^t uu - \mathrm{Id})\,.$$

On prouve (ii) et (iii) par un argument de convexité. On note Σ la sphère unité de $\mathrm{End}^s(E)$. Pour tout $w \in \Sigma$, pour tout $x \in E$, on remarque que la fonction numérique $f_w : t \mapsto f_w(t) = \varphi_x(\exp(tw) - \mathrm{Id})$ est convexe, et que $f_w(0) = 0$, $f'_w(0) = \varphi_x(w)$.

En effet, en notant λ_i les valeurs propres de w et (ε_i) une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de w, on a, en posant $x = \sum_i \xi_i \varepsilon_i$, $f_w(t) = \sum \xi_i^2 (e^{t\lambda_i} - 1)$, d'où les dérivées $f'_w(t) = \sum \xi_i^2 \lambda_i e^{t\lambda_i}$ et $f''_w(t) = \sum \xi_i^2 \lambda_i^2 e^{t\lambda_i} \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $w(x) = 0$.

(ii) Soient $x \in E$ et $v \neq 0$. On pose $\| v \| = t$ et $w = \dfrac{v}{t} \in \Sigma$. La convexité de la fonction f_w précédente montre que $\varphi_x(\exp v - \mathrm{Id}) = \varphi_x(\exp(tw) - \mathrm{Id}) \geqslant t\varphi_x(w) = \varphi_x(v)$, l'égalité exigeant $w(x) = v(x) = 0$.

(iii) Soit $w \in F \cap \Sigma$. Par hypothèse, il existe $x \in S$ tel que $\varphi_x(w)$ soit < 0. La convexité de la fonction f_w correspondante montre qu'il existe $t_w > 0$ tel que $f_w(t)$ soit négative pour tout $t \in]0, t_w[$. Il en est donc de même de $M_w(t) = \min_x(\varphi_x(\exp(tw) - \mathrm{Id}))$, et, plus précisément, si M_w est négative en un point t_0, elle l'est sur tout l'intervalle $]0, t_0[$.

La fonction $w' \mapsto M_{w'}(t_w)$ étant continue sur $F \cap \Sigma$, il existe un voisinage ouvert $V(w)$ de w dans $F \cap \Sigma$ tel que, pour $w' \in V(w)$, $M_{w'}$ soit négatif en t_w, et donc aussi sur l'intervalle $]0, t_w]$. Du recouvrement $\cup_{w \in F \cap \Sigma} V(w)$ du compact $F \cap \Sigma$, on extrait un recouvrement fini $\cup_{1 \leqslant i \leqslant r} V(w_i)$, et l'on pose $\alpha = \min(t_{w_1} \cdots t_{w_r})$. Soit alors $v \in F$ tel que $0 < \| v \| < \alpha$ et soit $w = \frac{1}{\| v \|} v \in \Sigma$. Il existe i, $1 \leqslant i \leqslant r$, tel que w appartienne à $V(w_i)$ et donc $M_w(t)$ est < 0 sur l'intervalle $]0, \alpha[\subset]0, t_{w_i}]$.

(iv) Pour u suffisamment voisin de Id (modulo le groupe orthogonal), les vecteurs minimaux du réseau $u(L)$ proviennent de vecteurs minimaux de S, de sorte que $N(u(L)) = \min_{x \in S} N(u(x))$, d'où le résultat grâce à (i). □

4.3. LEMME. *Soit L un réseau, et soit $u \in \mathrm{Gl}(E)$ tel que $u(L)$ soit semblable à L. Alors, si u est assez voisin de l'identité, u lui-même est une similitude.*

Démonstration. Le rapport de similitude λ_u des deux réseaux est tel que $\lambda_u^{2n} = \frac{\det(u(L))}{\det(L)} = (\det u)^2$, et tend donc vers 1 quand u tend vers l'identité. Quitte à remplacer u par $\lambda_u^{-1} u$, on peut donc supposer les réseaux isométriques. Il existe alors une isométrie f avec $(fu)(L) = L$. Donc, fu appartient au sous-groupe discret $\mathrm{Gl}(L)$ de $\mathrm{Gl}(E)$, et ${}^t uu = {}^t(fu)(fu)$ appartient à l'ensemble discret des ${}^t vv$, $v \in \mathrm{Gl}(L)$. Pour u assez voisin de l'identité, on a donc ${}^t uu = \mathrm{Id}$, ce qui signifie que u est une isométrie. □

Soit $\mathscr{F}$ une famille de réseaux vérifiant les hypothèses et notations de l'introduction: il existe un sous-groupe fermé $\mathscr{G}$ de $\mathrm{Gl}(E)$ tel que les composantes connexes de $\mathscr{F}$ sont des orbites de la composante connexe neutre $\mathscr{G}^{\circ}$ de $\mathscr{G}$. On suppose que $\mathscr{G}$ est stable par transposition. L'espace tangent en l'identité à la variété des ${}^t uu$, $u \in \mathscr{G}$, est noté $\mathscr{T}$. *On suppose de plus que la famille $\mathscr{F}$ est stable par homothéties, ou bien constituée de réseaux de même déterminant.*

La proposition suivante permet si besoin est de ne considérer que des automorphismes symétriques de $\mathscr{G}$:

4.4. PROPOSITION. *Soit $u \in \mathscr{G}^{\circ}$ et soient f et s ses composantes orthogonale et symétrique. (On a $u = fs$ et s est défini positif.) Alors, f et s appartiennent aussi à $\mathscr{G}^{\circ}$.*

Démonstration. Comme ${}^t uu$ est défini positif, il existe $v \in \mathrm{End}^s(E)$ tel que ${}^t uu = \exp v$. Comme $\mathscr{G}$ est stable par transposition, v est dans l'espace tangent à $\mathscr{G}$ (et en fait dans $\mathscr{T}$). Alors, $t = \exp \frac{v}{2}$ est un endomorphisme symétrique positif appartenant à $\mathscr{G}^{\circ}$, et l'on a $t^2 = {}^t uu$, donc $t = s$. Ainsi, s, et par suite f, sont dans $\mathscr{G}^{\circ}$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un théorème à la Voronoï.

On rappelle qu'un réseau $L \in \mathscr{F}$ est dit *strictement extrême* s'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de L dans $\mathscr{F}$ dans lequel tout réseau L' *non semblable à* L vérifie l'inégalité stricte $\gamma(L') < \gamma(L)$.

4.5. THÉORÈME. *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{T}$ comme ci-dessus. Soit L un réseau appartenant à $\mathscr{F}$ et soit S l'ensemble de ses vecteurs minimaux. Alors:*

(i) *L est strictement extrême dans $\mathscr{F}$ si et seulement s'il est $\mathscr{T}$-parfait et $\mathscr{T}$-eutactique.*

(ii) *Si L est extrême mais non strictement extrême, il existe dans $\mathscr{F}$ un arc d'origine L, formé de réseaux extrêmes deux à deux non semblables, de même invariant d'Hermite que L et qui, à l'exception de L, ont tous même ensemble de vecteurs minimaux engendrant un sous-espace strict de E.*

Démonstration. Pour étudier l'invariant d'Hermite au voisinage de L, on peut remplacer $\mathscr{F}$ par la famille normalisée $\mathscr{F}_0 = \{L' \in \mathscr{F} \mid \det(L') = \det(L)\}$, et donc, d'après 4.1, l'espace $\mathscr{T}$ par $\mathscr{T}_0 = \{v \in \mathscr{T} \mid \mathrm{Tr}(v) = 0\}$. L'invariant d'Hermite est alors proportionnel à la norme des réseaux.

Supposons d'abord que S soit $\mathscr{E}$-parfait et $\mathscr{E}$-eutactique. D'après le critère 3.2., on a donc, pour tout élément $v \neq 0$ de $\mathscr{E}_0$, $\min_{x \in S} \varphi_x(v) < 0$ (puisque $\operatorname{Tr}(v) = 0$). D'après le lemme 4.2,(iii) (appliqué à S et au cône $F = \mathscr{E}_0$), il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $v \in \mathscr{E}_0$ avec $0 < \|v\| < \alpha$, on ait $\min_{x \in S} \varphi_x\left(\exp\left(\frac{1}{2}v\right) - \mathrm{Id}\right) < 0$. De même, il existe $\beta > 0$ tel que, pour $\|v\| < \beta$, $N\left(\left(\exp\left(\frac{1}{2}v\right)(L)\right) - N(L) = \min_{x \in S} \varphi_x\left(\exp\left(\frac{1}{2}v\right) - \mathrm{Id}\right)$ (4.2,(iv)). Soit $\varepsilon = \min(\alpha, \beta)$. Pour tout réseau L' appartenant au voisinage $\mathscr{U} = \{\exp\left(\frac{1}{2}v\right)(L),\ v \in \mathscr{E}_0,\ 0 < \|v\| < \varepsilon\}$ de L dans $\mathscr{F}_0$, on a $N(L') - N(L) < 0$, i.e. $\gamma(L') < \gamma(L)$: dans $\mathscr{U}$, $\gamma(L)$ est un maximum strict: L est strictement extrême.

Supposons inversement que $L \in \mathscr{F}$ réalise un maximum de la fonction d'Hermite dans un voisinage $\mathscr{U}$ de L dans $\mathscr{F}$, que l'on suppose assez petit pour que les vecteurs minimaux des réseaux qu'il contient proviennent de ceux de L, et soit $v \in \mathscr{E}_0$ tel que

$$(4.6) \qquad \min_{x \in S} (\varphi_x(v)) \geqslant 0 .$$

Pour $t > 0$, on considère

$$(4.7) \qquad u_t = \exp\left(\frac{t}{2} v\right) \in \mathscr{G}^+ \quad \text{et} \quad L_t = u_t(L) \in \mathscr{F}_0 .$$

On suppose t assez petit pour que L_t appartienne à $\mathscr{U}$, et pour que u_t vérifie la condition du lemme 4.3. Puisque $\operatorname{Tr}(v) = 0$, on a $\det u_t = 1$ (cf. 4.1), et donc $\det(L_t) = \det(L)$, et pour t assez petit (lemme 4.2,(iv) et (iii)), la condition (4.6) entraîne

$$\begin{aligned} \det(L)^{1/n}(\gamma(L_t) - \gamma(L)) &= N(L_t) - N(L) \\ &= \min_{x \in S} (\varphi_x(\exp(tv) - \mathrm{Id})) \geqslant t \min_{x \in S} \varphi_x(v) \geqslant 0 . \end{aligned}$$

Le caractère maximal de $\gamma(L)$ dans $\mathscr{U}$ implique que les inégalités ci-dessus sont des égalités, et donc que $\gamma(L_t) = \gamma(L)$. De plus, les vecteurs minimaux de L_t sont les vecteurs $u_t(x)$, avec $x \in S$ tel que $\varphi_x(\exp(tv) - \mathrm{Id})) = t\varphi_x(v) = 0$, c'est-à-dire, d'après 4.2,(ii), $v(x) = 0$ donc $u_t(x) = x$. On a donc

$$(4.8) \qquad S(L_t) = S \cap \operatorname{Ker}(v) .$$

Si l'on suppose $\gamma(L)$ strictement maximal dans $\mathscr{U}$, la relation $\gamma(L_t) = \gamma(L)$ exige que L_t soit semblable à L, et donc (lemme 4.3) que u_t soit une isométrie (rappelons que $\det(u_t) = 1$), c'est-à-dire que v soit nul. Ainsi, sous cette hypothèse, la condition (4.6) implique $v = 0$: L est alors

$\mathscr{E}_0$-parfait et $\mathscr{E}_0$-eutactique, ce qui achève de prouver (i), compte tenu de 3.4.

Sinon, d'après l'étude de la partie directe, S n'est pas à la fois $\mathscr{E}_0$-parfait et $\mathscr{E}_0$-eutactique, et il existe bien dans $\mathscr{E}_0$ un élément $v \neq 0$ vérifiant les conditions (4.6). Les réseaux L_t construits à partir de v sont alors deux à deux non semblables, et vérifient les propriétés énoncées dans (ii). □

4.9. COROLLAIRE. *Si un réseau* L *est strictement extrême pour un groupe* $\mathscr{G}$, *le nombre* s *de couples* $\pm x$ *de ses vecteurs minimaux vérifie*

$$s \geqslant \dim(\mathscr{G}) \,,$$

et même, dans le cas où $\mathscr{G}$ *est formé d'éléments de déterminant* ± 1,

$$s \geqslant \dim(\mathscr{G}) + 1 \,.$$

Démonstration. La $\mathscr{E}$-perfection de l'ensemble S des vecteurs minimaux implique $s \geqslant \dim(\mathscr{E}) = \dim(\mathscr{G})$; si de plus $\mathscr{G}$ est formé d'éléments de déterminant ± 1, $\mathscr{E}$ est contenu dans le noyau de la trace, de sorte que la relation de $\mathscr{E}$-eutaxie se traduit par une relation non triviale entre les φ_x, $x \in S(L)$, et l'on a donc $s \geqslant \dim(\langle \varphi_x, x \in S(L)\rangle) + 1$. □

[Remarquons que dans ce cas, L est aussi strictement extrême pour le groupe $\mathscr{G}' = \mathbf{R}^* \mathscr{G}$ de dimension $\dim(\mathscr{G}) + 1$.]

Sans hypothèse particulière sur $\mathscr{G}$, il peut exister des réseaux extrêmes qui ne le sont pas strictement. L'exemple suivant correspond à la famille isoduale réductible de dimension 3 considérée dans [C-S3].

Soit σ une rotation de $\mathbf{R}^3$ d'angle $\pi/2$ et d'axe une droite D dont on note P le plan orthogonal, et soit L un réseau σ- isodual. Il est en particulier stable par σ^2, ce qui entraîne que L contient avec l'indice 1 ou 2 la somme orthogonale $L \cap D \perp L \cap P$. On constate que l'indice 2 est impossible pour les réseaux σ-isoduaux, et que l'on a $L \cap D \simeq \mathbf{Z}$ (et $\det(L \cap P) = 1$). On a donc $\gamma(L) = N(L) \leqslant 1$, et les réseaux σ-extrêmes sont ceux pour lesquels $L \cap P$ est de norme $\geqslant 1$. Ils constituent modulo isométries une variété à bord de dimension 2. Aucun d'entre eux n'est strictement extrême, et leurs vecteurs minimaux peuvent se limiter à ceux de D.