

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX. APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX  
**Autor:** Bergé, Anne-Marie / Martinet, Jacques  
**Kapitel:** 5. RÉSULTATS DE CLASSIFICATION  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61830>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 5. RÉSULTATS DE CLASSIFICATION

On conserve les notations et hypothèses des paragraphes précédents. On suppose en outre que  $\mathcal{G}$  est connexe.

On classe ci-dessous les réseaux selon la configuration de leurs vecteurs minimaux, généralisant des notions introduites dans [Ber] et [B-M3] (et auparavant de façon informelle dans [B-M1], §5).

5.1. DÉFINITION. Soient  $L$  et  $L'$  deux réseaux appartenant à la famille  $\mathcal{F}$ , et  $S$  et  $S'$  leurs ensembles de vecteurs minimaux. On définit les relations suivantes:

$L' \equiv L$  s'il existe  $u \in \mathcal{G}$  tel que  $L' = u(L)$  et  $S' = u(S)$ ,

$L' \prec L$  s'il existe  $u \in \mathcal{G}$  tel que  $L' = u(L)$  et  $S' \subset u(S)$ .

La relation  $\equiv$  est une relation d'équivalence dans  $\mathcal{F}$ , et la relation  $\prec$  induit un ordre (encore noté  $\prec$ ) sur l'ensemble des classes de  $\equiv$ -équivalence.

Le théorème suivant montre en particulier que les classes au sens de la déf. 5.1 contiennent au plus un réseau strictement  $\mathcal{C}$ -extrême.

5.2. THÉORÈME. Soit  $\mathcal{C}$  une classe et soit  $L \in \mathcal{C}$  un réseau  $\mathcal{C}$ -eutactique.

(1)  $L$ 'invariant d'Hermite atteint sur  $L$  son minimum dans la réunion  $\tilde{\mathcal{C}}$  des classes  $\prec \mathcal{C}$ .

(2) Si  $S(L)$  engendre  $E$ , ou si  $L$  est  $\mathcal{C}$ -parfait, alors les réseaux eutactiques de  $\mathcal{C}$  sont tous semblables à  $L$ .

[Si le nombre de classes est fini (comme c'est le cas dans les exemples du §2), on obtient la finitude des réseaux strictement extrêmes pour le groupe  $\mathcal{G}$ , et même des réseaux  $\mathcal{C}$ -eutactiques possédant  $n$  vecteurs minimaux indépendants.]

*Démonstration.* On se ramène tout de suite au cas où  $\mathcal{G}$  est de déterminant 1. Soit  $L' = u(L) \in \mathcal{F}$ ,  $u \in \mathcal{G}$ , un réseau tel que  $S' \supset u(S)$ . On a donc  $N(u(x)) = N(L')$  pour tout  $x \in S$ , c'est-à-dire (lemme 4.2, (i))

$$\varphi_x({}^t uu - \text{Id}) = N(L') - N(L) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

De plus, comme  $\mathcal{G}$  est connexe, il existe  $v \in \mathcal{C}$  (de trace évidemment nulle) tel que  ${}^t uu = \exp(v)$ . On a donc

$$(5.3) \quad \varphi_x(\exp(v) - \text{Id}) = N(L') - N(L) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Posons, pour tout  $x \in S$ ,

$$\psi_x(v) = \varphi_x(\exp(v) - \text{Id}) - \varphi_x(v).$$

D'après le lemme 4.2, (ii), on a l'inégalité  $\psi_x(v) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $v(x) = 0$ . Par 5.3, on a

$$(5.4) \quad N(L') - N(L) = \varphi_x(v) + \psi_x(v) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Puisque  $S$  est  $\mathcal{C}$ -eutactique, il existe des coefficients  $\rho_x > 0$  tels que  $\sum_{x \in S} \rho_x \varphi_x(v) = \text{Tr}(v) = 0$ , d'où l'on tire, par combinaison linéaire des relations 5.4:

$$(5.5) \quad \left( \sum_{x \in S} \rho_x \right) (N(L') - N(L)) = 0 + \sum_{x \in S} \rho_x \psi_x(v) \geq 0,$$

et donc  $N(L') - N(L) \geq 0$ , d'où  $\gamma(L') \geq \gamma(L)$ , ce qui prouve (1).

Pour prouver (2), on suppose de plus que  $L'$  est  $\mathcal{C}$ -eutactique et dans la classe  $\mathcal{C}$  (i.e., on a  $S(L') = u(S)$ ). En échangeant les rôles de  $L'$  et de  $L$ , on voit que l'on a  $N(L') - N(L) = 0$  (i.e.,  $\gamma(L') = \gamma(L)$ ), et donc (par 5.5)  $\psi_x(v) = 0$  c'est-à-dire  $v(x) = 0$  pour tout  $x \in S$ . Donc,  $S$  est inclus dans  $\text{Ker } v$ . Cela entraîne que  $v$  est nul: c'est clair si  $S$  engendre  $E$ , et, si  $L'$  est  $\mathcal{C}$ -parfait, cela résulte des égalités  $\varphi_x(v) = 0$  pour tout  $x \in S$ . On en déduit que l'on a  $'uu = \text{Id}$ , donc que  $u$  est une isométrie.  $\square$

5.6. COROLLAIRE. *Un réseau strictement  $\mathcal{C}$ -extrême est isolé (modulo similitude) dans sa classe  $\mathcal{C}$ ; en particulier, lorsqu'il s'agit d'un maximum absolu (strict), ce réseau est unique modulo similitude dans la réunion  $\tilde{\mathcal{C}}$  des classes qui contiennent  $\mathcal{C}$ .*

En effet, il réalise à la fois par définition même un maximum relatif (ou absolu) de  $\gamma$  dans  $\mathcal{F}$ , donc aussi dans  $\mathcal{C}$ , et d'après 5.2 un minimum absolu de  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}$ .

[Une traduction du corollaire ci-dessus est qu'un tel réseau perd des vecteurs minimaux par toute déformation suffisamment petite.]

## 6. ISODUALITÉ

Soit  $L$  un réseau de  $E$ , et soit  $L^*$  son dual. Si  $\sigma \in O(E)$  est une isométrie du réseau  $L$  sur son dual  $L^*$  (on dit alors que  $L$  est  $\sigma$ -isodual), l'égalité  $'\sigma = \sigma^{-1}$  montre que  $\sigma$  applique  $L^*$  sur  $L$ , de sorte que  $\sigma^2$  est un automorphisme du réseau  $L$ . On peut préciser ce résultat en introduisant le groupe