

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE  
**Autor:** Bourdon, Marc  
**Kapitel:** 1.4. Bord d'un espace hyperbolique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de CAT( $-b^2$ )-espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace  $X$  est dit à courbure inférieure ou égale à  $-b^2$ , si tout point de  $X$  admet un voisinage satisfaisant CAT( $-b^2$ ). Si  $X$  est géodésique simplement connexe à courbure  $\leq -b^2$ , alors  $X$  est un CAT( $-b^2$ )-espace.

#### 1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit  $(X, d_X)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de  $X$ , on le note  $\partial X$ .

On définit une topologie sur  $X \cup \partial X$ , de la manière suivante:

Soit  $x$  une origine dans  $X$ , et soit  $\mathcal{R}(x)$  l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma: I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle du type  $[0, +\infty[$  ou  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbf{R}^+$ , et  $\gamma$  vérifie  $\gamma(0) = x$ . Si  $I = [0, a]$ , convenons de prolonger  $\gamma$  à  $[0, +\infty[$ , en posant  $\gamma(t) = \gamma(a)$  pour  $t$  supérieur à  $a$ . Munissons  $\mathcal{R}(x)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli,  $\mathcal{R}(x)$  est compact et l'application naturelle de  $\mathcal{R}(x)$  dans  $X \cup \partial X$  est surjective. Equipé de la topologie quotient,  $X \cup \partial X$  est un compact, dans lequel l'espace métrique  $X$  est ouvert et dense. Ainsi le compact  $\partial X$  permet de compactifier  $X$ . On montre que la topologie est indépendante de l'origine  $x$ .

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent:

## 1.4.1. PROPOSITION

a) Soit  $x \in X$ , et  $\xi \in \partial X$ . Il existe un rayon géodésique d'extrémités  $x$  et  $\xi$ . On le notera  $[x\xi]$ . Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $2\delta$ .

b) Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ . Il existe une géodésique d'extrémités  $\xi$  et  $\xi'$ . On la notera  $(\xi\xi')$ . Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $4\delta$ .

c) (Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\delta, \lambda, k$ , avec la propriété suivante: tout  $(\lambda, k)$ -quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de  $X$ , est à distance de Hausdorff inférieure à  $C$  d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de  $X$ .

1.4.2. Remarque. Lorsque  $X$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, deux points de  $X \cup \partial X$  déterminent un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$ .

## 1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit  $X$  une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à  $-b^2$ . Etant donnée une origine  $x$  dans  $X$ , l'application exponentielle de l'espace tangent en  $x$ , induit un homéomorphisme de la sphère unité sur  $\partial X$ .

c) Soit  $X$  un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, et  $x$  une origine dans  $X$ . Notons  $S(x, R)$  la sphère de centre  $x$  et de rayon  $R$ . Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique, donc pour  $R \geq R'$ , il existe une application naturelle de  $S(x, R)$  dans  $S(x, R')$ . On montre que  $\partial X$  est homéomorphe à la limite projective des  $S(x, R)$ , lorsque  $R$  tend vers l'infini. Notons que le bord d'un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR  $\partial X$ 

De même qu'un changement conforme de métrique sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$ ,