Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR X

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

1.4.1. PROPOSITION

a) *Soit* $x \in X$, *et* $\xi \in \partial X$. *Il existe un rayon géodésique d'extrémités* x *et* ξ. *On le notera* $[x\xi)$. *Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 2δ.

b) *Soient* ξ *et* ξ' *deux points distincts de* ∂X. *Il existe une géodésique d'extrémités* ξ *et* ξ'. *On la notera* $(\xi\xi')$. *Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 4δ.

c) *(Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante* C *ne dépendant que de* δ, λ, k, *avec la propriété suivante: tout* (λ, k)*-quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de* X, *est à distance de Hausdorff inférieure à* C *d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de* X.

1.4.2. *Remarque.* Lorsque X est un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, deux points de $X \cup \partial X$ détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit X une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à $-b^2$. Etant donnée une origine x dans X, l'application exponentielle de l'espace tangent en x, induit un homéomorphisme de la sphère unité sur ∂X.

c) Soit X un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, et x une origine dans X. Notons $S(x, R)$ la sphère de centre x et de rayon R. Deux points de X déterminent un unique segment géodésique, donc pour $R \geqslant R'$, il existe une application naturelle de $S(x, R)$ dans $S(x, R')$. On montre que ∂X est homéomorphe à la limite projective des $S(x, R)$, lorsque R tend vers l'infini. Notons que le bord d'un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

De même qu'un changement conforme de métrique sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace δ-hyperbolique X, afin que $X \cup \partial X$ soit le complété de X pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C-D-P], [C], pour plus de détails). Ainsi ∂X hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire:

1.5.1. DÉFINITION. Soit x une origine dans X. Une métrique $d_{\partial X}$ sur ∂X a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de X de la façon suivante: Il existe une constante $C \geqslant 1$ et un réel $t > 1$, tels que pour tous éléments ξ, ξ' de ∂X:

$$C^{-1} t^{-d} \leqslant d_{\partial X}(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} .$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi \xi')) .$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres (x, t).

L'énoncé précis est le suivant: ([G], §7.2, [C-D-P], chapitre 11):

1.5.2. THÉORÈME (Gromov). *Il existe un réel* $t_0 > 1$, *ne dépendant que de* δ, *tel que pour tout* t *appartenant à* $]1, t_0[$, *le bord de* X *admette une métrique visuelle de paramètres* (x, t).

1.5.3. *Remarques*

a) Pour les CAT$(-b^2)$-espaces, le résultat est plus fin: leur bord admet une métrique visuelle de paramètre t, quel que soit t appartenant à $]1, e^b]$. Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W. J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que e^b est optimal car il l'est sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

b) Deux métriques visuelles d et d' de paramètres respectifs (x, t) et (x', t') sont facilement comparables: Si $t = t'$, alors elles sont Lipschitz-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$, telle que:

$$D^{-1} d \leqslant d' \leqslant D d .$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$ et un réel $\alpha > 0$, tels que:

$$D^{-1} d^{\alpha} \leqslant d' \leqslant D d^{\alpha} .$$

Ici α est égal à $\log t' / \log t$.

c) D'après b), toute isométrie de X est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de X muni d'une métrique visuelle.