

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN  
CAT(- 1)-ESPACE  
**Autor:** Bourdon, Marc  
**Kapitel:** 2.5. Une famille de métriques visuelles sur X  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Soit maintenant  $\xi, \xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ ,  $x$  un point de  $X$ , et  $p$  appartenant à  $(\xi\xi')$ . Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression:

$$\frac{1}{2}(B_\xi(x, p) + B_{\xi'}(x, p)) .$$

Elle est indépendante du point  $p$  choisi sur  $(\xi\xi')$ . On l'appellera produit de Gromov de  $\xi$  et  $\xi'$  relativement à  $x$ , et on la notera  $(\xi | \xi')_x$ . (Voir figure 1.)

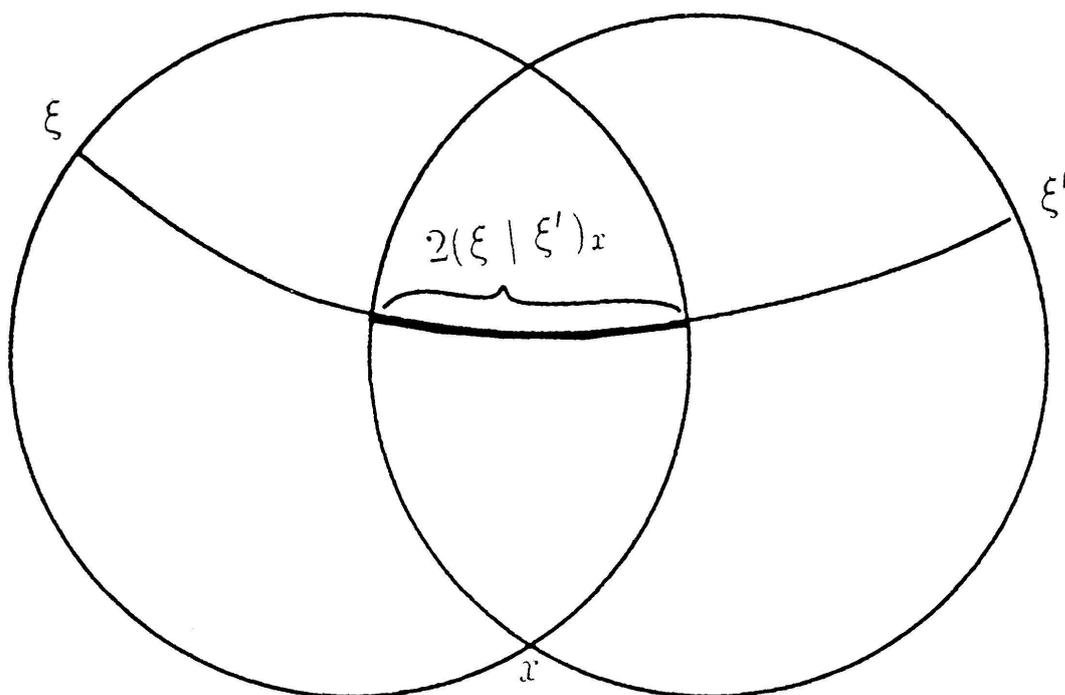


FIGURE 1

Notons que

$$(2.4.1) \quad (\xi | \xi')_x = (\xi' | \xi)_x$$

$$(2.4.2) \quad (\xi | \xi')_y = (\xi | \xi')_x - \frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y)) .$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante:

2.4.3. PROPOSITION. Soit  $y \in [x\xi)$  et  $y' \in [x\xi')$ . Le produit de Gromov  $(y | y')_x$  converge vers  $(\xi | \xi')_x$ , lorsque  $y$  et  $y'$  tendent respectivement vers  $\xi$  et  $\xi'$ .

## 2.5. UNE FAMILLE DE MÉTRIQUES VISUELLES SUR $\partial X$

Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Pour  $\xi, \xi' \in \partial X$ , définissons:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x} \quad \text{si } \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \quad \text{sinon .}$$

2.5.1. THÉORÈME.  $d_x$  est une métrique sur  $\partial X$ .

2.5.2. Remarque.  $d_x$  est une métrique visuelle de paramètres  $(x, e)$  (voir 1.5.1). En effet, l'expression

$$|(\xi | \xi')_x - d(x, (\xi \xi'))|$$

est majorée par une constante universelle (voir [G-H], chapitre 2, lemme 17).

Afin de montrer le théorème, nous introduisons un angle de comparaison, ou plutôt son sinus: Soit  $y, y'$  deux éléments de  $X - \{x\}$ . Soit  $(\bar{x} \bar{y} \bar{y}')$  un triangle de comparaison de  $(xyy')$  dans  $\mathbf{H}_R^2$ . Posons:

$$(2.5.3) \quad \alpha_x(y, y') = \sin \frac{\widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{y}'}}{2} .$$

On peut également exprimer  $\alpha_x(y, y')$  sans recourir à un triangle de comparaison. En effet, d'après les formules de trigonométrie dans  $\mathbf{H}_R^2$ , on a:

$$\alpha_x(y, y') = \left( \frac{\text{ch } |y - y'| - \text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} \right)^{1/2} .$$

Le théorème découlera des deux lemmes suivants:

2.5.4. LEMME. Soit  $S(x, r)$  la sphère de  $X$ , de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Sur  $S(x, r)$ ,  $r > 0$ ,  $\alpha_x$  est une métrique.

2.5.5. Preuve de 2.5.4. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Soient donc  $y, z, t$  appartenant à  $S(x, r)$ . D'après la relation 2.5.3, les valeurs de  $\alpha$  appartiennent à  $[0, 1]$ . Aussi, pour montrer l'inégalité triangulaire:

$$\alpha_x(y, t) \leq \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) ,$$

supposons:

$$(1) \quad \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) < 1 .$$

Soit  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbf{H}_R^2$ , tels que:

- a)  $(\bar{x} \bar{y} \bar{z})$  et  $(\bar{x} \bar{z} \bar{t})$  soient des triangles de comparaison de  $(xyz)$  et de  $(xzt)$ .
- b)  $(\bar{x} \bar{z})$  sépare  $\bar{y}$  et  $\bar{t}$  (voir figure 2).

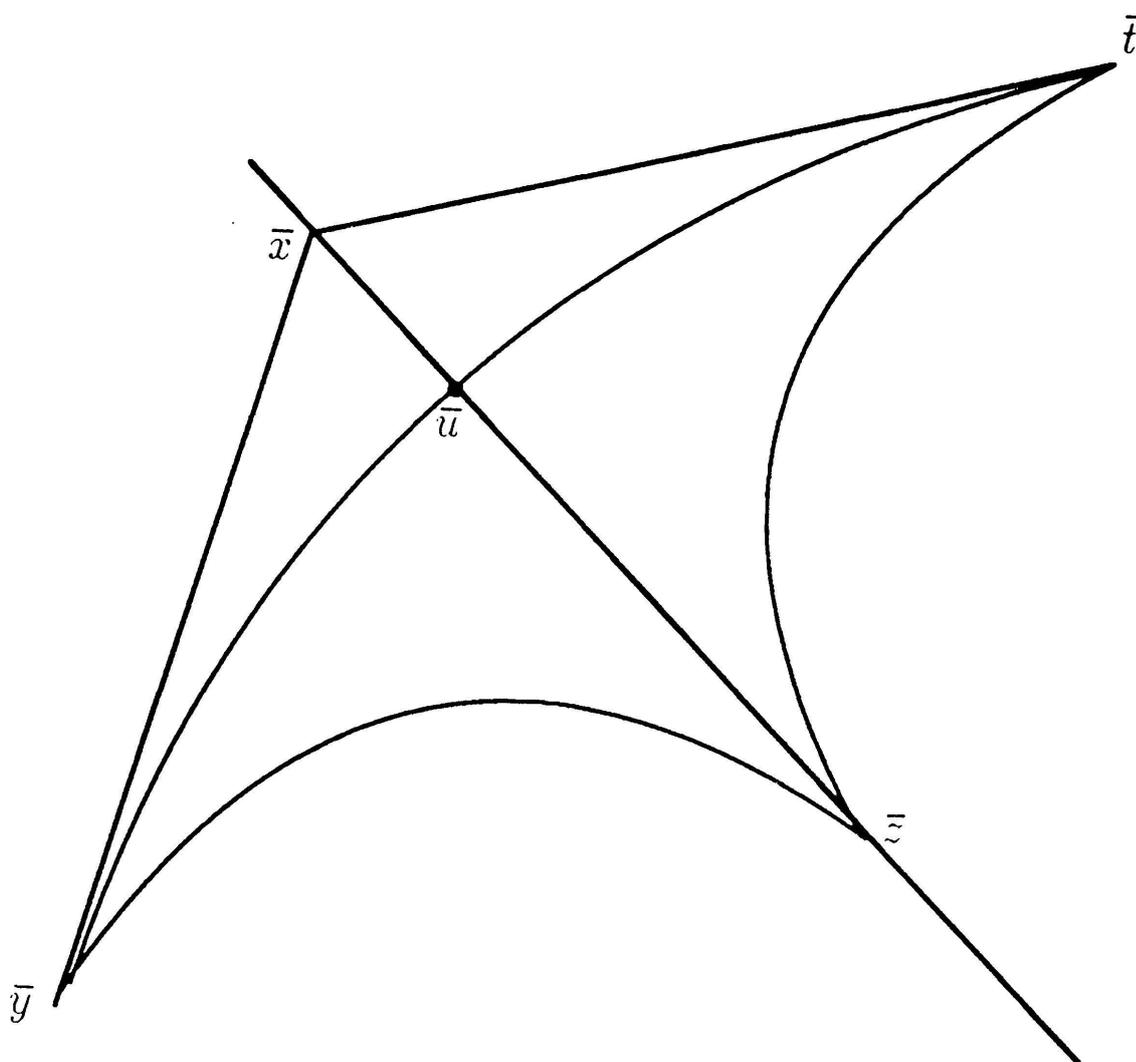


FIGURE 2

D'après 2.5.3, on a:

$$(2) \quad \alpha_x(y, z) = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}}}{2}, \quad \alpha_x(z, t) = \sin \frac{\widehat{\bar{z}\bar{x}\bar{t}}}{2}.$$

L'hypothèse (1) implique:

$$\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}} + \widehat{\bar{z}\bar{x}\bar{t}} < \pi,$$

de plus:

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{x} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{t}|,$$

et  $(\bar{x}\bar{z})$  sépare  $\bar{y}$  et  $\bar{t}$ . Donc le segment  $[\bar{y}\bar{t}]$  coupe  $[\bar{x}\bar{z}]$  en un unique point  $\bar{u}$ . Soit  $u \in [xz]$ , le point correspondant à  $\bar{u}$ . L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent alors:

$$\begin{aligned} |y - t| &\leq |y - u| + |u - t| \\ &\leq |\bar{y} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{t}| \\ &= |\bar{y} - \bar{t}|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha_x(y, t) &= \left( \frac{\text{ch } |y - t| - \text{ch}(|x - y| - |x - t|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh}(|x - t|)} \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \frac{\text{ch } |\bar{y} - \bar{t}| - \text{ch}(|\bar{x} - \bar{y}| - |\bar{x} - \bar{t}|)}{2 \text{sh } |\bar{x} - \bar{y}| \text{sh}(|\bar{x} - \bar{t}|)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire encore:

$$(3) \quad \alpha(y, t) \leq \sin \frac{\widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{t}}}{2}.$$

Or  $\widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{t}} = \widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{z}} + \widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{t}}$ , et  $\sin(a + b) \leq \sin a + \sin b$ , pour  $a, b$  appartenant à  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Donc (2) et (3) donnent:

$$\alpha_x(y, t) \leq \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t). \quad \square$$

2.5.6. LEMME. Soient  $y \in [x\xi)$ ,  $y' \in [x\xi')$ , alors:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} \alpha_x(y, y') = d_x(\xi, \xi').$$

2.5.7. Preuve de 2.5.6. On a:

$$\alpha_x(y, y') = \left( \frac{\text{ch } |y - y'|}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} - \frac{\text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} \right)^{1/2}.$$

Un calcul montre que:

$$\frac{\text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} = \frac{1}{2} (\coth |x - y| \coth |x - y'| - 1).$$

Cette expression tend vers 0 lorsque  $y \rightarrow \xi, y' \rightarrow \xi'$ . Par ailleurs:

$$\frac{\text{ch } |y - y'|}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} \sim e^{|y - y'| - |x - y| - |x - y'|} = e^{-2(y|y')_x},$$

or d'après la proposition 2.4.3, on a:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} (y|y')_x = (\xi|\xi')_x.$$

D'où le lemme.  $\square$

2.5.8. *Preuve du théorème 2.5.1.* Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Elle résulte des lemmes 2.5.4 et 2.5.6.  $\square$

2.5.9. EXEMPLES.

a) Prenons  $X = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ . Soit  $x$  le centre du modèle en boule. Alors:

$$d_x(\xi, \xi') = \sin \frac{\widehat{\xi x \xi'}}{2}$$

est la moitié de la longueur du segment euclidien reliant  $\xi$  à  $\xi'$  (voir figure 3).

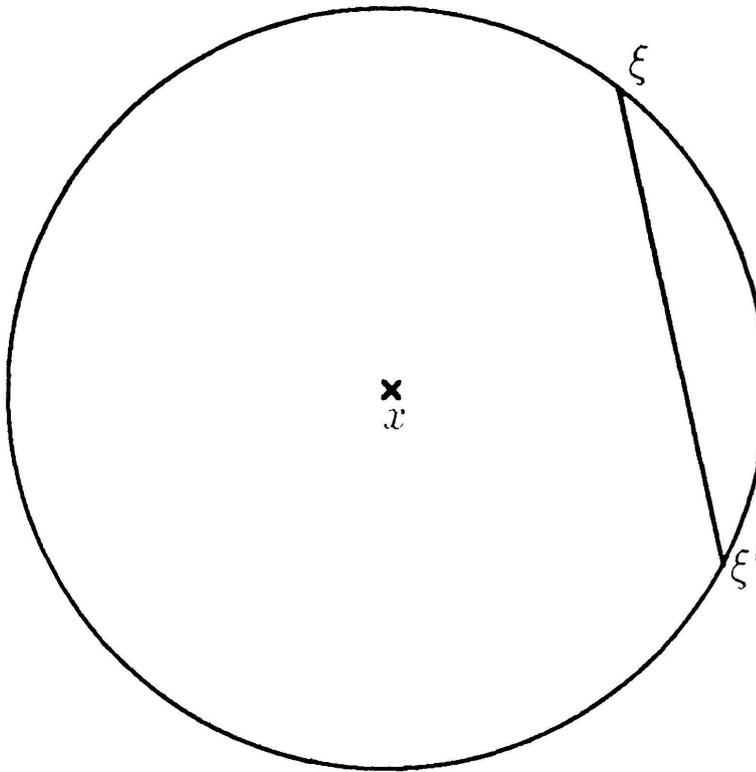


FIGURE 3

Ce n'est pas la métrique naturelle sur  $\partial X$ , qui est la métrique angulaire. Néanmoins elle lui est conforme, de facteur conforme constant égal à  $\frac{1}{2}$ .

b) Si  $X$  est un arbre réel:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x},$$

où  $(\xi | \xi')_x$  est la longueur du trajet que font ensemble les deux rayons géodésiques issus de  $x$  et allant vers  $\xi$  et  $\xi'$  (voir figure 4).

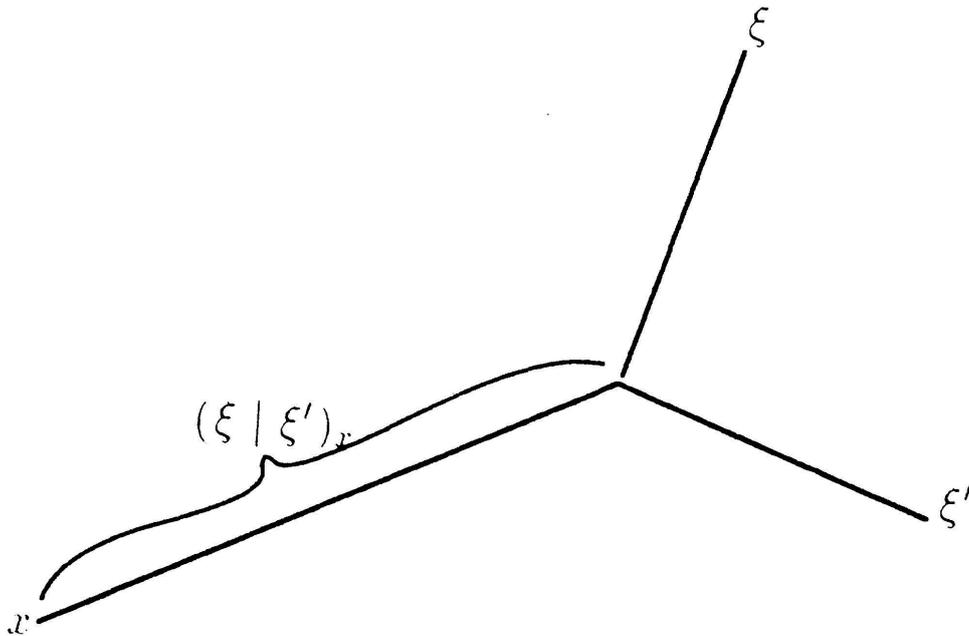


FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR  $\partial X$

Nous montrons maintenant que la famille de métriques  $\{d_x, x \in X\}$ , définit une structure conforme sur  $\partial X$ . On a:

2.6.1. PROPOSITION. Soit  $x$  une origine dans  $X$  et  $y, z$  deux éléments de  $X$ . La fonction sur  $(\partial X, d_x)$ , définie par:

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. Preuve. D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a:

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z).$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur  $(\partial X, d_x)$ . D'après la définition des métriques  $d_x$  et d'après la relation 2.4.2, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y))}$$

ou encore

$$(1) \quad B_\xi(x, y) = 2 \log d_y(\xi, \xi') - 2 \log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y).$$