

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE
Autor: Bourdon, Marc
Kapitel: 2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

2.7.5. THÉORÈME.

a) La dimension τ est égale au taux de croissance de Γ dans X .
C'est-à-dire:

$$\tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}.$$

b) La ν_x -mesure d'une boule de (Λ, d_x) , est proportionnelle à son rayon à la puissance τ . Autrement dit: il existe une constante $C_x \geq 1$, telle que pour toute boule $B(\xi, r)$ centrée sur Λ , on ait:

$$C_x^{-1} r^\tau \leq \nu_x(B(\xi, r)) \leq C_x r^\tau.$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats:

Soit $\alpha_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}$. S.J. Patterson a exhibé une mesure α_0 -conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α -mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ , les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ -mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ -mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X . Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X , dont les extrémités appartiennent à Λ :

$$G\Lambda = \{\gamma: \mathbf{R} \rightarrow X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\}.$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.

En effet, on a :

2.8.1. PROPOSITION. *Quel que soit $T \geq 0$, alors :*

$$\begin{aligned} e^{-T} \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X &\leq |\gamma - \gamma'|_{G\Lambda} \\ &\leq \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T}. \end{aligned}$$

2.8.2. *Preuve.* L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3):

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X. \quad \square$$

Clairement, le groupe Γ agit par isométries sur $(G\Lambda, ||_{G\Lambda})$ de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient :

$$\mathcal{E} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire (X, Γ) . Notons que \mathcal{E} est compact. En effet, Γ est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de Λ par Γ est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de $G\Lambda$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$, provenant de l'action naturelle de \mathbf{R} sur $G\Lambda$. Il est défini par :

$$(2.8.3) \quad \Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \quad \text{avec} \quad \gamma_T(t) = \gamma(t + T).$$

Remarquons que pour tout $T \in \mathbf{R}$, $g \in \Gamma$, et $\gamma \in G\Lambda$:

$$(2.8.4) \quad \Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma).$$

Le flot géodésique de \mathcal{E} est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur \mathcal{E} par la relation 2.8.4. On le notera encore $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$.

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de $(G\Lambda, \Phi_T)$. En $\gamma \in G\Lambda$, ils sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \left\{ \eta \in G\Lambda \mid |\Phi_T(\eta) - \Phi_T(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \right\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \left\{ \eta \in G\Lambda \mid |\Phi_{-T}(\eta) - \Phi_{-T}(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ils forment un feuilletage Φ_T -invariant de $G\Lambda$. D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante :

$$(2.8.5) \quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0), \gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0), \gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à Λ privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de (\mathcal{E}, Φ_T) par:

2.8.6. DÉFINITION. Soit π la projection de $G\Lambda$ sur \mathcal{E} , alors:

$$\begin{aligned} W^{ss}(\pi(\gamma)) &= \pi(W^{ss}(\gamma)) \\ W^{uu}(\pi(\gamma)) &= \pi(W^{uu}(\gamma)). \end{aligned}$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de $G\Lambda$ en γ , est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de γ sous Φ_T . En d'autres termes:

$$\begin{aligned} W^s(\gamma) &= \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^u(\gamma) &= \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}. \end{aligned}$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de \mathcal{E} . D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de $G\Lambda$, via la projection de $G\Lambda$ sur \mathcal{E} .

2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE (\mathcal{E}, Φ_T)

Choisissons une origine x dans X . Soit Δ la diagonale de $\Lambda \times \Lambda$. On définit une application de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ dans $G\Lambda$, de la manière suivante: à

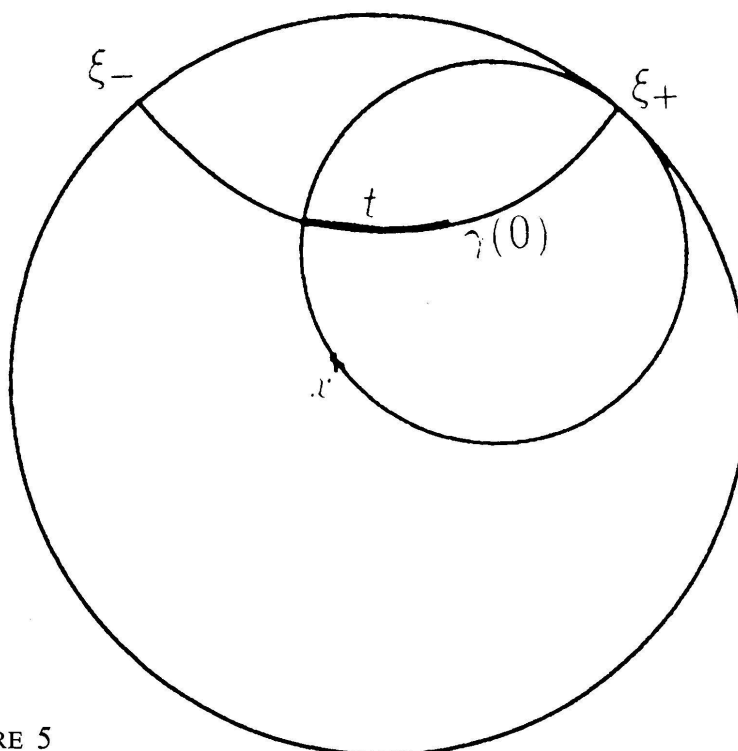


FIGURE 5