

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE
Autor: Bourdon, Marc
Kapitel: 2.10. Mesure d'entropie maximale
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

l'élément (ξ_-, ξ_+, t) de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$, associons l'unique élément γ de $G\Lambda$ vérifiant (voir figure 5):

$$(2.9.1) \quad \gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t.$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées Φ_T s'écrit:

$$(2.9.2) \quad \Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T).$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5):

$$(2.9.3) \quad \{(\xi_-, \xi_+, t), \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\}.$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de Γ s'écrit:

$$(2.9.4) \quad g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)).$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme:

$$(2.9.5) \quad (\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R} / \sim \rightarrow \mathcal{E}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$:

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe $g \in \Gamma$ tel que:

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x).$$

2.10. MESURE D'ENTROPIE MAXIMALE

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan ([Su], [Su2]), dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$, puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit x un élément de X , et soit respectivement τ et ν_x la dimension et la mesure de Hausdorff de (Λ, d_x) (voir 2.7). La mesure:

$$(2.10.1) \quad \mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}}$$

est une mesure de Radon sur $\Lambda \times \Lambda - \Delta$. Elle est indépendante de x et Γ -invariante. En effet $\{\nu_x, \nu \in X\}$ est une mesure τ -conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') [p(x, y, \xi) p(x, y, \xi')]^{1/2}.$$

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier $G\Lambda$ à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$. Soit alors \tilde{m} la mesure sur $G\Lambda$ définie par :

$$\tilde{m} = \mu \times dt .$$

C'est une mesure de Radon. Γ -invariante et Φ_T -invariante. La mesure m , restriction de \tilde{m} au compact \mathcal{E} , (considéré comme un domaine fondamental de Γ dans $G\Lambda$), est finie et Φ_T -invariante. On a :

2.10.2. THÉORÈME. Φ_T est ergodique sur (\mathcal{E}, m) .

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que μ s'écrit comme un produit de deux mesures sur Λ .

Clairement, l'ergodicité de Φ_T sur (\mathcal{E}, m) est équivalente à celle de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$. Puisque μ et $\nu_x \times \nu_x$ sont absolument continues, l'ergodicité de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ entraîne l'ergodicité de Γ sur (Λ, ν_x) . D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. L'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ et sur (Λ, ν_x) .

Notons respectivement h et h_m , l'entropie topologique de Φ_T et l'entropie mesurable de (Φ_T, m) . Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient :

2.10.4. THÉORÈME. $h = h_m = \tau$. Ainsi m maximise l'entropie mesurable.

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes :

Soient x_1, x_2 des origines respectivement de X_1 et X_2 . Notons d_1 et d_2 les métriques d_{x_1} et d_{x_2} sur Λ_1 et Λ_2 .

2.11.1. LEMME. Supposons que l'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \rightarrow (\Lambda_2, d_2)$ soit conforme. Alors, son facteur conforme ω est continu sur Λ_1 .

2.11.2. Preuve de 2.11.1. Puisque Ω est conforme, les ensembles limites Λ_1 et Λ_2 ont même dimension de Hausdorff τ . De plus, en notant ν_1 et ν_2 les τ -mesures de Hausdorff de (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2) , on a :

$$(1) \quad \Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 .$$