Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2.11. Preuve du théorème 2.0.1.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier $G\Lambda$ à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$. Soit alors $\tilde{m}$ la mesure sur $G\Lambda$ définie par:

$$\tilde{m} = \mu \times dt \,.$$

C'est une mesure de Radon. Γ-invariante et Φ_T-invariante. La mesure m, restriction de $\tilde{m}$ au compact $\mathscr{C}$, (considéré comme un domaine fondamental de Γ dans $G\Lambda$), est finie et Φ_T-invariante. On a:

2.10.2. THÉORÈME. *Φ_T est ergodique sur $(\mathscr{C}, m)$.*

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que μ s'écrive comme un produit de deux mesures sur Λ.

Clairement, l'ergodicité de Φ_T sur $(\mathscr{C}, m)$ est équivalente à celle de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$. Puisque μ et $\nu_x \times \nu_x$ sont absolument continues, l'ergodicité de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ entraîne l'ergodicité de Γ sur (Λ, ν_x). D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. *L'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ et sur (Λ, ν_x).*

Notons respectivement h et h_m, l'entropie topologique de Φ_T et l'entropie mesurable de (Φ_T, m). Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient:

2.10.4. THÉORÈME. *$h = h_m = \tau$. Ainsi m maximise l'entropie mesurable.*

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes:

Soient x_1, x_2 des origines respectivement de X_1 et X_2. Notons d_1 et d_2 les métriques d_{x_1} et d_{x_2} sur Λ_1 et Λ_2.

2.11.1. LEMME. *Supposons que l'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ soit conforme. Alors, son facteur conforme ω est continu sur Λ_1.*

2.11.2. *Preuve de 2.11.1.* Puisque Ω est conforme, les ensembles limites Λ_1 et Λ_2 ont même dimension de Hausdorff τ. De plus, en notant ν_1 et ν_2 les τ-mesures de Hausdorff de (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2), on a:

(1) $$\Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 \,.$$

Soit μ_1 et μ_2 les mesures sur $\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta$ et $\Lambda_2 \times \Lambda_2 - \Delta$, définies par la relation 2.10.1. D'après l'égalité (1), la mesure:

$$(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$$

est absolument continue par rapport à μ_1. De plus, μ_2 est Γ-invariante et Ω est Γ-équivariant, donc $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ est Γ-invariante. Alors, puisque l'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta, \mu_1)$ (corollaire 2.10.3), les mesures $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ et μ_1 sont égales à une constante près. Donc, à une constante près leurs densités par rapport à $\nu_1 \times \nu_1$ sont presque sûrement égales. D'où $\nu_1 \times \nu_1$-presque sûrement:

$$\frac{\omega^\tau(\xi)\omega^\tau(\xi')}{[d_1(\xi, \xi')]^{2\tau}} = \frac{\text{Cste}}{[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^{2\tau}},$$

soit encore

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = (\text{Cste})^{1/\tau} \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

L'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ étant continue, ω l'est également. Notons qu'en faisant tendre ξ' vers ξ, on trouve Cste = 1. □

Soit maintenant s_i l'involution de $G\Lambda_i$ définie par:

$$s_i(\gamma) = \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = \gamma(-t) .$$

Par passage au quotient on obtient une involution de $\mathscr{E}_i$ que l'on notera encore s_i.

2.11.3. LEMME. *Supposons que l'homéomorphisme* $G: \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ *conjugue les flots géodésiques. Quitte à remplacer* G *par* $G' = \Phi_{T_0} \circ G$ *pour un certain réel* T_0, *on peut supposer:*

$$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

2.11.4. *Preuve de 2.11.3.* Soit T la fonction sur $\mathscr{E}_1$ dans $\mathbf{R}$, définie de la manière suivante: Etant donné $\gamma \in \mathscr{E}_1$, $T(\gamma)$ est l'unique réel vérifiant:

$$\Phi_{T(\gamma)}(G \circ s_1(\gamma)) = s_2 \circ \Phi_{T(\gamma)}(G(\gamma)) . \tag{1}$$

La fonction T est continue et invariante par le flot de $\mathscr{E}_1$. Aussi elle est constante (par l'ergodicité du flot sur $(\mathscr{E}_1, m_1)$; (théorème 2.10.2)). Notons T_0 la valeur constante de T, et G' l'application $\Phi_{T_0} \circ G$. D'après (1), on a:

$$G' \circ s_1 = s_2 \circ G' . \quad \square$$

2.11.5. *Preuve de 2.0.1.* Montrons (i) ⇒ (ii).

Soit $g \in \Gamma$. Notons respectivement $|g'|_1$ et $|g'|_2$, le facteur conforme de g sur (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2). En écrivant:

$$\Omega \circ g = g \circ \Omega .$$

et en calculant le facteur conforme des deux membres, on obtient:

$$(\omega \circ g)|g'|_1 = (|g'|_2 \circ \Omega)\omega . \tag{1}$$

Construisons maintenant notre conjugaison: Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant pour origines les points x_1 et x_2. Définissons une application $\tilde{G}$ de $G\Lambda_1$ dans $G\Lambda_2$, par:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+)) .$$

D'après le lemme 2.11.1, ω est continue, donc $\tilde{G}$ est un homéomorphisme. D'après la relation 2.9.2, il conjugue les flots de $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$. De plus, quel que soit $g \in \Gamma$, il vérifie:

$$\tilde{G} \circ g = g \circ \tilde{G} . \tag{2}$$

En effet, d'après 2.9.4 on a:

$$\begin{aligned}&(\tilde{G} \circ g)(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (\Omega \circ g(\xi_-), \Omega \circ g(\xi_+), t - B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) - \log\omega \circ g(\xi_+))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(g \circ \tilde{G})(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (g \circ \Omega(\xi_-), g \circ \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+) - B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2)) .\end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.6.3,

$$B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) = \log|g'(\xi_+)|_1$$

et

$$B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2) = \log(|g'|_2 \circ \Omega(\xi_+)) .$$

Ainsi l'égalité (2) provient de (1) et de la Γ-équivariance de Ω. Grâce à (2), on obtient une conjugaison des flots de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Par construction, elle induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$.

Montrons (ii) ⇒ (i).

Soit $G: \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ une conjugaison des flots, qui induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. D'après le lemme 2.11.3, on peut supposer:

(3) $$G \circ s_1 = s_2 \circ G\,.$$

Relevons la conjugaison G à $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ de la manière suivante: Soit π_i la projection de $G\Lambda_i$ sur $\mathscr{E}_i$. Pour $\gamma: \mathbf{R} \to X_1$ appartenant à $G\Lambda_1$, soit $\gamma': \mathbf{R} \to X_2$, un élément de $G\Lambda_2$ vérifiant:

$$\gamma'(-\infty) = \Omega(\gamma(-\infty)), \quad \gamma'(+\infty) = \Omega(\gamma(+\infty))$$

et

$$\pi_2(\gamma') = G(\pi_1(\gamma))\,.$$

Notons que γ' existe puisque G induit F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. De plus, si $\pi_1(\gamma)$ n'appartient à aucune orbite périodique de $\mathscr{E}_1$, γ' est unique. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} \tilde{G}: G\Lambda_1 &\to G\Lambda_2 \\ \gamma &\mapsto \gamma' \end{aligned}$$

définie sauf sur les relevés des orbites périodiques, qui conjugue les flots, vérifie:

$$G \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{G}\,.$$

ainsi que, d'après (3):

(4) $$\tilde{G} \circ s_1 = s_2 \circ \tilde{G}\,.$$

Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant les points x_1 et x_2 comme origines. Puisque G est une conjugaison continue entre les compacts $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, elle est uniformément continue. Aussi elle envoie sous-ensembles fortement stables sur sous-ensembles fortement stables. D'après sa définition et la proposition 2.8.6, $\tilde{G}$ a la même propriété. Aussi, d'après 2.9.3, $\tilde{G}$ s'écrit en coordonnées:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log \omega(\xi_+))\,,$$

pour une certaine fonction ω de Λ_1 dans $]0, +\infty[$. Notons que ceci permet de définir $\tilde{G}$ sur $G\Lambda_1$ tout entier.

Comparons maintenant les métriques $d_1 = d_{x_1}$ et $d_2 = d_{x_2}$ sur Λ_1 et Λ_2: Soit ξ et ξ' deux points distincts de Λ_1, et p appartenant à $(\xi\xi')$. Soit γ l'élément de $G\Lambda_1$, vérifiant:

$$\gamma(-\infty) = \xi, \; \gamma(+\infty) = \xi' \quad \text{et} \quad \gamma(0) = p\,.$$

Les points $\tilde{G}(\gamma)(0)$ et $\tilde{G}(s_1(\gamma))(0)$ appartiennent à la géodésique $(\Omega(\xi)\Omega(\xi'))$ de X_2. D'après (4) ils sont égaux. Notons-les q. En coordonnées on a:

$$\gamma = (\xi, \xi', B_{\xi'}(x_1, p))$$

et

$$s_1(\gamma) = (\xi', \xi, B_{\xi}(x_1, p)) .$$

D'où:

$$\tilde{G}(\gamma) = (\Omega(\xi), \Omega(\xi'), B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi'))$$

et

$$\tilde{G}(s_1(\gamma)) = (\Omega(\xi'), \Omega(\xi), B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi))$$

donc

$$B_{\Omega(\xi')}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi')}(x_2, \tilde{G}(\gamma)(0)) = B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi') \tag{5}$$

et

$$B_{\Omega(\xi)}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi)}(x_2, \tilde{G}(s_1(\gamma))(0)) = B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi) . \tag{6}$$

Ainsi (5) et (6) donnent:

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

Puisque l'application Ω de (Λ_1, d_1) sur (Λ_2, d_2) est continue, ω l'est également. Alors, en faisant tendre ξ' vers ξ, Ω est conforme de facteur conforme ω. □

RÉFÉRENCES

[Be] BENAKLI, N. *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global.* Thèse, Université de Paris-Sud, 1992.

[Bea] BEARDON, A.F. *The geometry of discrete groups.* G.T.M. 91, Springer, 1983.

[Ber] BERGER, M. *Géométrie, Vol. 3.* Cedric Nathan, 1978.

[C] COORNAERT, M. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov. *Pacific J. of Math. 159* (1993), 241-270.

[C-D-P] —— T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov.* Lecture Notes in Math. 1441. Springer, 1990.

[C-E-H-P-T] CANNON, J.W., D.B.A. EPSTEIN, D.F. HOLT, M.S. PATERSON et W.P. THURSTON. *Word processing and group theory.* Bartlett and Jones, Boston, 1992.