

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION
Autor: Bayer-Fluckiger, Eva
Kapitel: 1. Rappels et notations (voir [4] ou [7])
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61819>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

par Eva BAYER-FLUCKIGER

INTRODUCTION

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit q une forme quadratique anisotrope sur k . Si E est une extension de k , on note q_E la forme quadratique obtenue par extension des scalaires à E . On dit que q devient isotrope sur E si la forme q_E est isotrope.

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible, et notons $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$. Le but de cette note est de présenter un critère nécessaire et suffisant pour que q devienne isotrope sur $k(f)$, et d'en donner quelques applications. Sous une forme légèrement différente, ce critère avait été obtenu par Witt [9].

Je remercie T. Y. Lam, A. Merkurjev, A. Pfister et J.-P. Tignol pour leurs remarques sur des versions précédentes de ce travail.

1. RAPPELS ET NOTATIONS (voir [4] ou [7])

Toutes les formes quadratiques considérées sont supposées *non dégénérées*. Pour $a_1, \dots, a_n \in k^*$, on note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme quadratique $a_1 X_1^2 + \dots + a_n X_n^2$. On dit qu'une forme quadratique $q: V \rightarrow K$ est *isotrope* s'il existe $x \in V$, $x \neq 0$, tel que $q(x) = 0$. Sinon, on dit qu'elle est anisotrope. Par exemple, le *plan hyperbolique* $H = \langle 1, -1 \rangle$ est isotrope.

Si q' et q'' sont deux formes quadratiques, on note $q' \oplus q''$ leur somme orthogonale. On dit que la forme quadratique q *contient* q' s'il existe une forme quadratique q'' telle que $q \simeq q' \oplus q''$.

Si q est isotrope, alors q contient au moins un plan hyperbolique. On dit que q est une *forme hyperbolique* (ou forme neutre) si q est une somme orthogonale de plans hyperboliques.

Pour toute forme quadratique q , on note $G(q) \subset k^*/k^{*2}$ le groupe des multiplicateurs de similitude de q :

$$G(q) = \{ \alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \cdot q \simeq q \} .$$

Soit $D(q) \subset k^*/k^{*2}$ l'ensemble des éléments représentés par q , c'est-à-dire l'ensemble des $\alpha \in k^*/k^{*2}$ tels qu'il existe $v \in V$ avec $q(v) = \alpha$.

Remarquons que si q représente 1, alors $G(q) \subset D(q)$.

Soit $\langle D(q) \rangle$ le sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par $D(q)$. (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient $a_1, \dots, a_r \in k^*$, et posons $\ll a_1, \dots, a_r \gg = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_r \rangle$. C'est une forme à 2^r variables, appelée la r -forme de Pfister associée à a_1, \dots, a_r .

Si q est une forme de Pfister, alors $G(q) = D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

2. CRITÈRES

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . On ordonne les monômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ par l'ordre lexicographique. On dit que $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$.

Soit q une forme anisotrope de dimension n . On s'intéressera aux extensions $E = k(f)$ de k sur lesquelles q devient isotrope. Si q_E est isotrope, alors il en est de même de $\alpha \cdot q_E$, pour tout $\alpha \in k^*$. On peut donc supposer que q représente 1.

Soient $G_m(q) = G(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, $D_m(q) = D(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, et $\langle D_m(q) \rangle = \langle D(q_{k(X_1, \dots, X_m)}) \rangle$.

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. *Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \dots f_r$.*