Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

Autor: Bayer-Fluckiger, Eva

Kapitel: 2. Critères

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61819

Pour toute forme quadratique q, on note $G(q) \subset k^*/k^{*2}$ le groupe des multiplicateurs de similitude de q:

$$G(q) = \{\alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \,.\, q \simeq q\} \,.$$

Soit $D(q) \subset k^*/k^{*2}$ l'ensemble des éléments représentés par q, c'est-à-dire l'ensemble des $\alpha \in k^*/k^{*2}$ tels qu'il existe $v \in V$ avec $q(v) = \alpha$.

Remarquons que si q représente 1, alors $G(q) \subset D(q)$.

Soit $< D(q) >$ le sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par $D(q)$. (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient $a_1, \ldots, a_r \in k^*$, et posons $\ll a_1, \ldots, a_r \gg \, = \, < 1, a_1 > \otimes \ldots \otimes < 1, a_r >$. C'est une forme à 2^r variables, appelée la r-forme de Pfister associée à $a_1, \ldots, a_r$.

Si q est une forme de Pfister, alors $G(q) = D(q) = < D(q) >$ (cf. [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

2. Critères

Soit $k[X_1, \ldots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k. On ordonne les monômes de $k[X_1, \ldots, X_m]$ par l'ordre lexicographique. On dit que $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \ldots, X_m]/(f)$.

Soit q une forme anisotrope de dimension n. On s'intéressera aux extensions $E = k(f)$ de k sur lesquelles q devient isotrope. Si q_E est isotrope, alors il en est de même de $\alpha \cdot q_E$, pour tout $\alpha \in k^*$. On peut donc supposer que *q représente* 1.

Soient $G_m(q) = G(q_{k(X_1, \ldots, X_m)})$, $D_m(q) = D(q_{k(X_1, \ldots, X_m)})$, et $< D_m(q) > \, = \, < D(q_{k(X_1, \ldots, X_m)}) >$.

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. *Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \ldots f_r$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $f \in <D_m(q)>$;

b) $a \in <D(q)>$ *et* $f_i \in <D_m(q)>$ *pour tout* $i = 1, \ldots, r$;

c) $a \in <D(q)>$ *et* $q_{k(f_i)}$ *est isotrope pour tout* $i = 1, \ldots, r$.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *irréductible et unitaire. Alors* $f \in <D_m(q)>$ *si et seulement si* $q_{k(f)}$ *est isotrope.*

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. *Soit* q *une forme quadratique anisotrope qui représente* 1. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$, *et soient* $a \in k^*, f_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *irréductibles, unitaires et distincts tels que* $f = af_1 \ldots f_r$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $f \in G_m(q)$;

b) $a \in G(q)$ *et* $f_i \in G_m(q)$ *pour tout* $i = 1, \ldots, r$;

c) $a \in G(q)$ *et* $q_{k(f_i)}$ *est hyperbolique pour tout* $i = 1, \ldots, r$.

COROLLAIRE. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *irréductible et unitaire. Alors* $f \in G_m(q)$ *si et seulement si* $q_{k(f)}$ *est hyperbolique.*

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, § 10 ou [4], chap. 10, § 1), et les groupes $G(q_E)$ et $<D(q_E)>$ coïncident pour toute extension E de k.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$. On dit que f est *normé* (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à $<D(q)>$.

Une *représentation primitive* de q sur $k[X_1, \ldots, X_m]$ est un polynôme de la forme $q(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. *Soit* $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *un polynôme irréductible et normé. Supposons que* f *divise une représentation primitive de* q *sur* $k[X_1, \ldots, X_m]$. *Alors* $f \in <D_m(q)>$.