

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION
Autor: Bayer-Fluckiger, Eva
Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61819>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in \langle D_m(q) \rangle$;
- b) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $q_{k(f_i)}$ est isotrope pour tout $i = 1, \dots, r$.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est isotrope.

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$, et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = af_1 \dots f_r$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in G_m(q)$;
- b) $a \in G(q)$ et $f_i \in G_m(q)$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in G(q)$ et $q_{k(f_i)}$ est hyperbolique pour tout $i = 1, \dots, r$.

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in G_m(q)$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est hyperbolique.

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, §1), et les groupes $G(q_E)$ et $\langle D(q_E) \rangle$ coïncident pour toute extension E de k .

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$. On dit que f est *normé* (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à $\langle D(q) \rangle$.

Une *représentation primitive* de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$ est un polynôme de la forme $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible et normé. Supposons que f divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Il suffit de considérer le cas où q est anisotrope. Montrons ce lemme par récurrence sur le nombre de X_i qui interviennent dans f et sur $\deg_{X_1}(f)$. Si f est constant, alors par hypothèse $f \in \langle D(q) \rangle \subset \langle D_m(q) \rangle$. Le lemme est donc vrai dans ce cas. Supposons que X_1 intervienne dans f . Le polynôme f divise $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$, non tous divisibles par f . Considérons f et les ϕ_i comme des polynômes de $k(X_2, \dots, X_m)[X_1]$. Réduisons les ϕ_i modulo f , et notons $\bar{\phi}_i$ les polynômes réduits. Multiplions-les par leur dénominateur commun, lequel est un élément de $k[X_2, \dots, X_m]$, et soient ϕ'_1, \dots, ϕ'_n les polynômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ ainsi obtenus. On a donc

$$fh = q(\phi'_1, \dots, \phi'_n)$$

avec $h, \phi'_1, \dots, \phi'_n \in k[X_1, \dots, X_m]$, et $\deg_{X_1}(\phi'_i) < \deg_{X_1}(f)$. Alors on a aussi $\deg_{X_1}(h) < \deg_{X_1}(f)$. Par hypothèse de récurrence, $h \in \langle D_m(q) \rangle$. On a donc $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Démonstration du théorème 1.

$a) \Rightarrow c)$: Comme $f \in \langle D_m(q) \rangle$, le coefficient a du terme de plus haut degré de f est dans $\langle D(q) \rangle$. L'hypothèse entraîne aussi qu'il existe $x_1, \dots, x_s \in k[X_1, \dots, X_m]^n$ tels que $q(x_1), \dots, q(x_s)$ soient des représentations primitives de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$, et que l'on ait l'égalité

$$f = af_1 \dots f_r = q(x_1) \dots q(x_s)$$

dans $k(X_1, \dots, X_m)^* / k(X_1, \dots, X_m)^{*2}$. Comme les polynômes f_i sont irréductibles et distincts, chacun d'entre eux divise l'un des $q(x_j)$. En réduisant x_j modulo f_i , on obtient un zéro non trivial de q sur $k(f_i)$.

$c) \Rightarrow b)$: Comme $q_{k(f_i)}$ est isotrope, f_i divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Par le lemme, $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$.

$b) \Rightarrow a)$ est trivial.

4. EXTENSIONS FINIES — LE THÉORÈME DE SPRINGER

Soit $m = 1$, et notons $X = X_1$. Le corps $k(f)$ est alors une extension finie de k . Le corollaire du théorème entraîne le théorème de Springer [8]:

THÉORÈME DE SPRINGER. *Si une forme quadratique devient isotrope sur une extension de degré impair, alors elle est isotrope.*