

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION
Autor: Bayer-Fluckiger, Eva
Kapitel: 6. Corps de fonctions d'une quadrique
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61819>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

THÉORÈME 6. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, et tout polynôme irréductible et unitaire $f \in k[X]$, on a :*

$$q_{k(f)} \text{ est hyperbolique } \Rightarrow f \in G(q_{k(X)}) .$$

THÉORÈME 7 (théorème de la norme de Scharlau). *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, et toute extension finie E de k , on a :*

$$N_{E/k}(G(q_E)) \subset G(q) .$$

THÉORÈME 8. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, $G(q)$ contient le groupe $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit hyperbolique.*

Remarque. Gille [2] et Merkurjev [5], [6] ont généralisé certains des énoncés étudiés dans ce §.

6. CORPS DE FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE

Supposons f homogène de degré 2. Alors f est aussi une forme quadratique. On suppose que $m > 2$ ou $m = 2$ et f anisotrope, ce qui implique que le polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est irréductible. Le corps $k(f)$ est appelé le *corps de zéros générique* de la forme quadratique f . C'est aussi le corps des fonctions de la quadrique (affine) correspondante.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k . Remarquons que l'on a les inclusions suivantes :

$$G_m(q) \subset D_m(q) \subset \langle D_m(q) \rangle .$$

THÉORÈME 9. *Supposons que la forme quadratique f représente 1. Alors on a :*

- a) $q_{k(f)}$ est hyperbolique si et seulement si $f \in G_m(q)$;
- b) q contient f si et seulement si $f \in D_m(q)$;
- c) $q_{k(f)}$ est isotrope si et seulement si $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

a) est un cas particulier du corollaire du théorème 2 (voir aussi [4], 4.5.3), b) est le «théorème de la sous-forme» de Pfister (cf. [4], th. 9.2.8), et c) est un cas particulier du corollaire du théorème 1.

Voici une autre démonstration de c). On montre ici que si $q_{k(f)}$ est isotrope, alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$, l'autre implication étant facile. Écrivons la

forme quadratique f comme $f \simeq \langle 1 \rangle \oplus f'$. Alors $k(f) = F(\sqrt{-f'(X')})$, où $X' = (X_2, \dots, X_m)$ et $F = k(X')$. Supposons $q_{k(f)}$ isotrope. Alors par [4], 2.5.1, on a:

$$q_F \simeq a \langle 1, f'(X') \rangle \oplus q' \simeq \langle a \rangle \oplus q''.$$

Donc $a \in D(q_F) \subset D_m(q)$.

D'autre part, $\langle 1, f'(X') \rangle$ représente f sur $F(X_1) = k(X_1, \dots, X_m)$. Donc $a \langle 1, f'(X') \rangle$ représente af sur $k(X_1, \dots, X_m)$. On en déduit que $af \in D_m(q)$. Comme $a \in D_m(q)$, on a $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

7. APPLICATIONS

Voici quelques applications du théorème 1:

SOMMES DE CARRÉS

COROLLAIRE 1. *Soit s un entier positif. Si un polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$, alors tout polynôme irréductible et unitaire divisant f avec un exposant impair est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$.*

Soit q la forme quadratique somme de 2^s carrés. Alors q est une forme de Pfister, donc $D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [4], chap. 2, §10 ou [3], chap. 10, cor. 1.7). Le corollaire découle de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, appliqué au produit des polynômes irréductibles divisant f avec un exposant impair.

Le cas $m = 1$ de ce corollaire est dû à Kaplansky (cf. [4], chap. 10, cor. 2.10).

PRINCIPE DE HASSE

Soit k un corps de nombres. On note v une place (finie ou infinie) de k , et k_v le complété de k en v . Soit q une forme quadratique anisotrope sur k .

COROLLAIRE 2. *Soit $f \in k[X]$. Alors*

$$f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle \text{ pour toute place } v \text{ de } k \Leftrightarrow f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle.$$

Il est clair que $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle \Rightarrow f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle$ pour toute place v de k .