

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 42 (1996)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONJECTURE abc
Autor: Nitaj, Abderrahmane
Kapitel: 2. La conjecture abc
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-87869>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

2. LA CONJECTURE abc

Dans cette partie, nous allons rappeler la conjecture abc , ainsi que les quelques tentatives qui ont été faites pour essayer de la démontrer. La définition suivante est étroitement liée à la conjecture abc .

DÉFINITION 2.1. Soit n un entier non nul. On appelle radical de n et on écrit $r(n)$ le produit

$$r(n) = \prod_{p|n} p \quad (p \text{ premier})$$

des facteurs premiers distincts divisant n , avec par convention $r(1) = 1$.

Le radical est quelquefois appelé support, conducteur ou noyau et vérifie $r(n) | n$.

Motivés par un théorème de Mason ([10], [20]) sur les polynômes et par certaines conjectures de Szpiro [31], J. Oesterlé et D.W. Masser ont formulé en 1985 la conjecture suivante, plus connue sous le nom de conjecture abc [20]:

CONJECTURE 2.2. (abc). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs, vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$ on ait:

$$c \leq c(\varepsilon) (r(abc))^{1+\varepsilon}.$$

Une première analyse de l'inégalité de la conjecture abc montre que si un triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifie $a + b = c$ et $(a, b) = 1$, alors le produit abc est composé de nombres premiers distincts avec pour la plupart un exposant relativement petit. On peut constater ce fait dans les tables de factorisation de nombres de la forme $a^n - b^n$, données à la fin du livre de H. Riesel (voir [24], pp. 388-437).

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, la constante $c(\varepsilon)$ qui lui correspond dans la conjecture abc peut être unique, en prenant:

$$(2.3) \quad c(\varepsilon) = \inf_{(a,b,c) \in I} \frac{c}{(r(abc))^{1+\varepsilon}},$$

avec $I = \{(a, b, c) \in \mathbf{N}^3, (a, b) = 1, a + b = c\}$. Quant à la possibilité de prendre $\varepsilon = 0$ dans la conjecture abc , la proposition suivante montre que ce choix n'est pas possible.

PROPOSITION 2.4. *Pour $\varepsilon > 0$, soit $c(\varepsilon)$ la constante définie par (2.3) vérifiant l'inégalité de la conjecture *abc*. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = +\infty .$$

Preuve. On définit les entiers x_n et y_n par la relation:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n .$$

Alors pour tout $n \geq 1$, $1 + 2y_n^2 = x_n^2$. Si $n = 2^m$, on vérifie facilement par récurrence que $2^{m+1} \mid y_n$. Appliquons la conjecture *abc* à la relation $x_n^2 = 1 + 2y_n^2$. On obtient pour $n = 2^m$:

$$x_n^2 \leq c(\varepsilon) (r(x_n y_n))^{1+\varepsilon} \leq c(\varepsilon) (x_n y_n / 2^m)^{1+\varepsilon} \leq c(\varepsilon) x_n^{2(1+\varepsilon)} / 2^{m(1+\varepsilon)} .$$

Alors $c(\varepsilon) \geq 2^{m(1+\varepsilon)} / x_n^{2\varepsilon}$ et donc

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) \geq 2^m ,$$

ce qui montre que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = +\infty$. \square

Des démonstrations différentes de la proposition 2.4. se trouvent dans [10] et [20].

Depuis sa formulation en 1985, peu de résultats théoriques ont été découverts sur la conjecture *abc*. Il n'existe actuellement que deux théorèmes la concernant. Les démonstrations de ces deux théorèmes s'appuient sur des méthodes utilisant des formes linéaires de logarithmes complexes et *p*-adiques. Nous donnons ici ces deux théorèmes. Leurs démonstrations se trouvent dans [29] et [30] respectivement.

THÉORÈME 2.5. (Stewart, Tijdeman, 1986). *Il existe une constante effectivement calculable $k > 0$ telle que, pour tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs, vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$ on ait:*

$$c < \exp \{ k(r(abc))^{15} \} .$$

THÉORÈME 2.6. (Stewart, Yu, 1990). *Il existe une constante effectivement calculable $k > 0$ telle que, pour tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs, vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$ on ait:*

$$c < \exp \{ (r(abc))^{2/3 + k/\log \log r(abc)} \} .$$

Remarquons que les inégalités des deux théorèmes ci-dessus sont exponentielles en $r(abc)$, alors que l'inégalité de la conjecture *abc* est seulement polynomiale.