

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 42 (1996)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** BARBIER'S THEOREM FOR THE SPHERE AND THE HYPERBOLIC PLANE  
**Autor:** Araújo, Paulo Ventura

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87880>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

that  $\mathcal{L} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ , otherwise  $\mathcal{L}$  is too large for  $\gamma$  to be a circle and the desired inequality holds trivially. Under these conditions inequality (1) is equivalent to

$$(17) \quad A \leq \frac{1}{K} \left\{ 2\pi - \sqrt{4\pi^2 - K \mathcal{L}^2} \right\}.$$

Combining Theorem B and (17) we obtain

$$\mathcal{L} \geq \frac{1}{\sqrt{K}} \tan\left(\frac{\sqrt{K} \mathcal{W}}{2}\right) \sqrt{4\pi^2 - K \mathcal{L}^2},$$

which is equivalent to

$$(18) \quad \mathcal{L} \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sin\left(\frac{\sqrt{K} \mathcal{W}}{2}\right)$$

— and this is the inequality we want. If equality holds in (18) then it also holds in each of the equivalent inequalities (17) and (1) — and therefore  $\gamma$  is a circle.

The case  $K < 0$  has a similar (and easier) treatment. We begin by rewriting (1) in the form

$$A \leq -\frac{1}{K} \left\{ \sqrt{4\pi^2 - K \mathcal{L}^2} - 2\pi \right\},$$

and then proceed as before.  $\square$

#### REFERENCES

- [B] BARBIER, E. Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. *J. Math. Pures Appl.* (2) 5 (1860), 273–286.
- [Bl] BLASCHKE, W. Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen von konstanter Breite. *Ber. d. Verh. d. Sächs. Akad. Leipzig* 67 (1915), 290–297.
- [C] CADWELL, J.H. *Topics in Recreational Mathematics*. Cambridge University Press, 1966.
- [dC] DO CARMO, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall 1976.
- [E] EGGLESTON, H.G. *Convexity*. Cambridge University Press, 1958.
- [HS] HAMMER, P.C. and T.J. SMITH. Conditions equivalent to central symmetry of convex curves. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 60 (1964), 779–785.
- [O] OSSERMAN, R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), 1–29.

- [RT] RADEMACHER, H. and O. TOEPLITZ. *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton Univ. Press, 1970.
- [S] SANTALÓ, L. A. Note on convex curves on the hyperbolic plane. *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 405–412.
- [St] STRUIK, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, 1988.

(Reçu le 25 janvier 1996)

Paulo Ventura Araújo

Centro de Matemática  
Faculdade de Ciências do Porto  
4050 Porto  
Portugal  
*e-mail* : paraujo@fc1.fc.up.pt

**Vide-leer-empty**