Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 42 (1996)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan

Autor: Mathéus, Frédéric

Kapitel: IV. Estimations à priori des rayons

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87874

PROPOSITION (Lemme de Schwarz-Pick discret dans [B-St2]).

i) (monotonie). Si $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet frontière* s, *alors* $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet intérieur* s. *De plus, si* $r_{s_0} = r'_{s_0}$ *pour un sommet intérieur* s_0 *alors* $\forall s \in S, r_s = r'_s$;

ii) (lemme de Schwarz discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev (i.e.* $r'_s = +\infty$ *pour* $s \in B$) *alors* $r_s \leqslant r'_s$, $\forall s \in S$;

iii) (lemme de Pick discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev alors la distance entre deux sommets* s_0 *et* s_1 *dans* $\mathscr{T}_r$ *est inférieure à la distance entre les deux sommets correspondants dans* $\mathscr{T}_{r'}$.

Preuve de la proposition. Prouvons le point *i)*. On réalise la variété $\mathscr{T}_{r'}$, comme le temps 1 d'une déformation $\{\mathscr{T}_r(t); t \in [0, 1]\}$ de la variété $\mathscr{T}_r$ comme ci-avant, à ceci près que les rayons frontières de $\mathscr{T}_r(t)$ sont définis par

$$u_s(t) = \Psi(r_s(t)) = (1-t)\Psi(r_s) + t\Psi(r'_s)\ .$$

Pour tout t, il existe un opérateur de Schrödinger discret $\Delta^t + V^t$ sur $\mathscr{T}^1$ (le 1-squelette de $\mathscr{T}$) tel que:

$$\begin{cases} \Delta^t \dot{u}(t) + V^t \dot{u}(t) = 0 \\ \dot{u}_s(t) = \Psi(r'_s) - \Psi(r_s) \quad \text{si } s \in B. \end{cases}$$

Comme Ψ est décroissante, on a $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$, $\forall s \in B$. D'après le principe du maximum pour les opérateurs de Schrödinger on a également $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$ pour tout sommet intérieur s, donc $\Psi(r'_s) \leqslant \Psi(r_s)$ donc $r'_s \geqslant r_s$ pour ces sommets. De plus, $r_{s_0} = r'_{s_0}$ pour un sommet intérieur s_0 implique $\dot{u}_{s_0}(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ donc, d'après le même lemme, $\dot{u}_s(t) = 0$, $\forall t$, $\forall s \in S$ et donc $r_s = r'_s$, $\forall s \in S$.

Les points *ii)* et *iii)* résultent de *(i)*. □

IV. ESTIMATIONS À PRIORI DES RAYONS

Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $\mathscr{U}$, et S^K_ε l'ensemble des sommets de $\mathscr{T}_\varepsilon$ contenus dans K. On note $\tilde{r}_\varepsilon = (\tilde{r}^s_\varepsilon)_{s \in S_\varepsilon}$ la collection des rayons de l'empilement d'Andreev $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Le but de cette section est de démontrer la

PROPOSITION. *Il existe trois constantes* c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* K *et* $\mathscr{U}$ *telles que, si* ε *est assez petit, alors, pour* s *et* $s' \in S_\varepsilon^K$, *et* $t \in [0, 1]$,

i) $1 \leqslant \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{r_\varepsilon^s(t)} \leqslant c_1$,

ii) $\frac{1}{c_2} \leqslant \frac{r_\varepsilon^s(t)}{r_\varepsilon^{s'}(t)} \leqslant c_2$,

iii) $\frac{\varepsilon}{c_3} \leqslant r_\varepsilon^s(t) \leqslant c_3 \varepsilon$.

Cette proposition a été mise en évidence par Kenneth Stephenson: c'est le lemme 3 de [St1] et le lemme de comparaison 8.4.1 de [St2]. Voir aussi le lemme 8.3.1 de [St3]. Nous en reproduisons ici la démonstration, en suivant [St2]. Celle-ci est assez technique, et utilise à plusieurs reprises le lemme de Schwarz-Pick discret de la section précédente. Il faut tout d'abord un

LEMME DE DISTORSION («Distortion Lemma» 8.3.1 de [St2]). *Soit* $a \in]0, 1[$ *et* $\varepsilon \in]0, \frac{a}{64}[$. *Soit* Δ *le disque ouvert de centre* ζ *et de rayon* a *supposé contenu dans le disque unité. Soit* $\mathscr{C}$ *l'ensemble des cercles de rayon* ε *contenus dans* Δ *et centrés sur* $\zeta + 2\varepsilon \mathbf{Z} + 2\varepsilon e^{\frac{i\pi}{3}} \mathbf{Z}$. *Soit* C_0 *le cercle de* $\mathscr{C}$ *entré en* ζ *et* $\tilde{C}_0$ *le cercle de l'empilement d'Andreev* $\tilde{\mathscr{C}}$ *de* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathbf{D}$ *correspondant à* C_0 *et supposé centré en* 0.

Alors on a $\tilde{\rho} \leqslant \frac{\varepsilon}{a - 64\varepsilon}$, *où* $\tilde{\rho}$ *désigne le rayon euclidien du cercle* $\tilde{C}_0$.

Preuve du lemme de distorsion. Il suffit de traiter le cas où $\zeta = 0$ et $a = 1$, le cas général s'en déduisant aussitôt. Notons $\partial \mathscr{C}$ (resp. $\partial \tilde{\mathscr{C}}$) l'ensemble des cercles du bord de $\mathscr{C}$ (resp. $\tilde{\mathscr{C}}$). Soit $\nu \tilde{\mathscr{C}}$ l'homothétique de $\tilde{\mathscr{C}}$ dans l'homothétie (euclidienne) de centre 0 et de rapport ν. Soit C_s un cercle de $\partial \mathscr{C}$ et $\tilde{C}_s$, $\tilde{C}_s'$ les cercles qui lui correspondent dans les empilements $\tilde{\mathscr{C}}$ et $\nu \tilde{\mathscr{C}}$. Notons $\tilde{\rho}_s$ le rayon euclidien de $\tilde{C}_s$. Les rayons euclidiens de C_s et C_s' sont respectivement ε et $\nu \tilde{\rho}_s$. On note enfin r_s et r_s' les rayons hyperboliques de C_s et C_s' (le rayon hyperbolique de $\tilde{C}_s$ vaut $+\infty$). Nous allons démontrer que, lorsque $\nu = 1 - 64\varepsilon$, alors $r_s' \leqslant r_s$.

Commençons par minorer r_s. On observe que $\partial \mathscr{C}$ est contenu dans l'anneau $\{1 - 8\varepsilon < |z| < 1\}$ sur lequel la densité de Poincaré est minorée par $\frac{2}{1 - (1 - 8\varepsilon)^2}$, de sorte que l'on a:

$$r_s \geqslant \frac{2\varepsilon}{1 - (1 - 8\varepsilon)^2} = \frac{2\varepsilon}{16\varepsilon - 64\varepsilon^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - 4\varepsilon} > \frac{1}{8}.$$

A présent, majorons r_s'. Comme $\partial \mathscr{C}$ est contenu dans l'anneau $\{1 - 8\varepsilon < |z| < 1\}$, il en est de même pour $\partial \tilde{\mathscr{C}}$ d'après le lemme de

Schwarz-Pick discret, de sorte que $\tilde{\rho}_s < 4\varepsilon$, donc le rayon euclidien de C'_s vérifie $\nu\tilde{\rho}_s < 4\varepsilon\nu$. Par ailleurs, C'_s est contenu dans le disque $\{|z| < \nu\}$ sur lequel la densité de Poincaré est majorée par $\frac{2}{1-\nu^2}$. On en déduit que

$$r'_s \leqslant \frac{2}{1-\nu^2} \times \nu\tilde{\rho}_s \leqslant \frac{2}{1-\nu^2} \times 4\varepsilon\nu = \frac{8\varepsilon}{1-\nu} \times \frac{\nu}{1+\nu} \leqslant \frac{8\varepsilon}{1-\nu} = \frac{1}{8}$$

$$\text{si } \nu = 1 - 64\varepsilon\,.$$

Nous pouvons conclure: si $\nu = 1 - 64\varepsilon$, alors pour tout sommet frontière s, on a $r'_s \leqslant r_s$. D'après le principe de monotonie du lemme de Schwarz-Pick discret, on a $r'_0 \leqslant r_0$ ou r'_0 et r_0 désignent les rayons hyperboliques des cercles C'_0 et C_0. Ces cercles étant centrés en 0, on a la même inégalité pour leurs rayons euclidiens, à savoir $\nu\tilde{\rho}_0 \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\tilde{\rho}_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - 64\varepsilon}$$

qui est bien l'inégalité annoncée. □

Le lemme que voici, qui peut paraître surprenant au premier abord, est vraiment spécifique à la géométrie hyperbolique (voir [B-St2]):

LEMME. *Soit, dans le disque de Poincaré, un cercle* C *de rayon* r, *et* $C_1, \ldots, C_n$, n *cercles tangents extérieurement à* C, *d'intérieurs deux à deux disjoints, tels que* C_j *soit tangent à* C_{j+1} *et* C_n *à* C_1.
Alors on a $r < \sqrt{n}$.

Preuve du lemme. Le cercle C est contenu dans un polygone géodésique P à n côtés dont les sommets sont les centres des cercles $C_1, \ldots, C_n$, donc:

$$\text{aire}(C) < \text{aire}(P) \leqslant (n-2)\pi\,,$$

et le résultat découle de la formule donnant l'aire d'un disque hyperbolique en fonction de son rayon: $\text{aire}(C) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)$ de sorte que

$$\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \leqslant 4\pi\sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) < (n-2)\pi < n\pi\,. \quad \square$$

REMARQUE. L'inégalité optimale est $r \leqslant -\operatorname{Log}\sin\frac{\pi}{n}$ (cf. [B-St3], p. 34 et [M], p. 75).

Preuve de la proposition. Prouvons *i).* D'après le principe de monotonie du lemme de Schwarz-Pick, on a $\forall t \in [0, 1]$, $r^s_\varepsilon \leqslant r^s_\varepsilon(t) \leqslant \tilde{r}^s_\varepsilon$ de sorte qu'il suffit de comparer les rayons hyperboliques des cercles de $\mathscr{H}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$.

Posons $\delta = \operatorname{dist}(K; \mathbf{C} \setminus \mathscr{U})$. On applique le lemme de distorsion au disque $\Delta = \{ | z - s | < \delta \}$ où s est un sommet fixé de S_ε^K. L'ensemble $\mathscr{C}$ défini dans l'énoncé du lemme est un sous-empilement de $\mathscr{H}_\varepsilon$, le cercle C_0 est ici le cercle C_ε^s et le cercle $\tilde{C}_0$ est noté $C_s'^s$. Le rayon euclidien ρ_s' de ce dernier cercle vérifie donc

$$\frac{\rho_s'}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\delta - 64\varepsilon} \leqslant \frac{2}{\delta} \text{ dès que } \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{128}.$$

Revenons aux empilements $\mathscr{H}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Quitte à appliquer une transformation de Möbius à $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$, on peut toujours supposer que $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est centré à l'origine. Notons $\tilde{\rho}_s$ le rayon euclidien de $\tilde{C}_\varepsilon^s$. Comme $\mathscr{C}$ est un sous-empilement de l'empilement $\mathscr{H}_\varepsilon$, il résulte du lemme de Schwarz-Pick *i)* et *ii)* que le rayon hyperbolique de $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est inférieur au rayon hyperbolique de $C_\varepsilon'^s$. Comme ces cercles sont centrés en l'origine, ceci reste vrai pour leurs rayons euclidiens. On en déduit:

$$\tilde{\rho}_s \leqslant \rho_s' \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Comme $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est centré en 0 et que $\tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant \sqrt{6}$ d'après le dernier lemme, on déduit que $\tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant \frac{2\tilde{\rho}_s}{1 - \alpha^2}$ où $\alpha = \frac{e^{\sqrt{6}} - 1}{e^{\sqrt{6}} + 1}$. Par ailleurs, comme $\varepsilon \leqslant r_\varepsilon^s$ on a $\frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{r_\varepsilon^s} \leqslant \frac{2}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{\tilde{\rho}_s}{\varepsilon} \leqslant \frac{4}{\delta(1 - \alpha^2)}$ ce qui fournit une constante c_1 ne dépendant que de $\mathscr{U}$ et K.

Prouvons *ii)*. Soit s et $s' \in S_\varepsilon^K$, $t \in [0; 1]$ et $b = \frac{2}{1 - (1 - \delta)^2}$. Dans la succession d'inégalités qui suit, nous utilisons respectivement: le lemme de Schwarz-Pick discret; le résultat *i)* ci-dessus; la comparaison des rayons euclidiens et hyperboliques de $\mathscr{H}_\varepsilon$ dans la région $\{ | z | < 1 - \delta \}$; le fait que le rayon euclidien d'un cercle est toujours inférieur à son rayon hyperbolique; et le principe de monotonie:

$$r_\varepsilon^s(t) \leqslant \tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot r_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot b \cdot \varepsilon \leqslant c_1 \cdot b \cdot r_\varepsilon^{s'} \leqslant c_1 \cdot b \cdot r_\varepsilon^{s'}(t)$$

de sorte que $c_2 = c_1 \cdot b$ convient.

Enfin, prouvons *iii)*. Fixons $s \in S_\varepsilon^K$, et soit b la constante introduite ci-avant. On a $r_\varepsilon^s \leqslant b\varepsilon$. D'après l'inégalité *i)*, on a: $r_\varepsilon^s(t) \leqslant \tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot r_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot b\varepsilon$. Comme $\varepsilon \leqslant r_\varepsilon^s \leqslant r_\varepsilon^s(t)$, on a l'inégalité cherchée avec $c_3 = c_1 \cdot b (= c_2)$. □