

5. The vanishing of $q(G)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

map $H^1(G; \mathbf{Z}G) \longrightarrow H^1(G; l_2G)$ induced by the imbedding $\mathbf{Z}G \longrightarrow l_2G$ is easily seen to be injective. Since we have assumed $H^1(G; \mathbf{Z}G) \neq 0$ the result follows.

5. THE VANISHING OF $q(G)$

5.1. Here we mention in a few words what happens when for a finitely presented group G the invariant $q(G)$ is 0. For the details and more comments we refer to the paper [E2]. We thus consider a 4-manifold M with $\pi_1(M) = G$ and $\chi(M) = 0$.

Since we restrict attention to groups with $\bar{\beta}_1(G) = 0$ the vanishing of $\chi(M)$ implies $\bar{\beta}_2(M) = 0$, whence $\bar{H}^2(\tilde{M}) = 0$. As shown in [E2] by a spectral sequence argument it follows that $H^2(M; \mathbf{Z}G)$ is isomorphic to $H^2(G; \mathbf{Z}G)$, ordinary cohomology with local coefficients $\mathbf{Z}G$. By Poincaré duality $H^2(M; \mathbf{Z}G) = H_2(M; \mathbf{Z}G)$ which can be identified with $H_2(\tilde{M}; \mathbf{Z})$. Since \tilde{M} is simply connected, $H_2(\tilde{M}; \mathbf{Z})$ is isomorphic to the second homotopy group $\pi_2(\tilde{M}) = \pi_2(M)$.

What about $H_3(\tilde{M}; \mathbf{Z})$? It can be identified with $H_3(M; \mathbf{Z}G)$ which, by Poincaré duality, is $\cong H^1(M; \mathbf{Z}G) = H^1(G; \mathbf{Z}G)$. This group, the “endpoint-group” of G , is known to be either 0 or \mathbf{Z} or of infinite rank. As mentioned in 4.4, remark 3) the latter case is excluded by our assumption $\bar{\beta}_1(G) = 0$. The case $H^1(G; \mathbf{Z}G) = \mathbf{Z}$ is exceptional: it means that G is virtually infinite cyclic, and we exclude this. Then $H_3(\tilde{M}; \mathbf{Z}) = 0$.

5.2. We now add the assumption that $H^2(G; \mathbf{Z}G) = 0$. This is a property shared by many groups (e.g. duality groups). Then the homology groups $H_i(\tilde{M}; \mathbf{Z})$ are $= 0$ for $i = 1, 2, 3, 4$ ($i = 4$ because \tilde{M} is an open manifold). Thus all homotopy groups of \tilde{M} are $= 0$, \tilde{M} is contractible, M is a $K(G, 1)$, and the group G fulfills Poincaré duality.

THEOREM 6. *Let G be an infinite, finitely presented group, not virtually infinite cyclic, fulfilling $\bar{\beta}_1(G) = 0$ and $H^2(G; \mathbf{Z}G) = 0$, and let M be a manifold with fundamental group G . If the Euler characteristic $\chi(M) = 0$, then M is an Eilenberg-MacLane space for G and G is a Poincaré duality group of dimension 4.*

We recall that for knot groups and 2-knot groups $q(G) = 0$, see examples 3) and 4) in 2.2. Theorem 6 can only be applied to 2-knot groups which are not classical knot groups since the latter have cohomological dimension 2.