

# §4. L'OUVERT D'ÉQUISINGULARITÉ D'UN PINCEAU LOCAL

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## §4. L'OUVERT D'ÉQUISINGULARITÉ D'UN PINCEAU LOCAL

Dans ce paragraphe, nous donnons une preuve détaillée du théorème suivant, qui caractérise l'ouvert d'équisingularité d'un pinceau local.

**THÉORÈME 4.1.** *Soient  $h_1$  et  $h_2$  comme au début du paragraphe 2. Soient  $w$  et  $w'$  deux points de  $\mathbf{P}^1$ . Alors :*

1. *Les germes  $h^{-1}(w)$  et  $h^{-1}(w')$  ont même topologie si  $w$  et  $w'$  sont génériques.*
2. *Les germes  $h^{-1}(w)$  et  $h^{-1}(w'')$  n'ont pas la même topologie si  $w$  est générique et si  $w''$  est spécial.*

Commençons par énoncer une proposition qui est un cas particulier d'un phénomène bien plus général.

**PROPOSITION 4.2.** *Soient  $h_1$  et  $h_2$  comme au début du paragraphe 2. Alors il existe un ouvert non-vide  $\Omega \subset \mathbf{P}^1$  ayant les propriétés suivantes :*

1. *Si  $w$  et  $w' \in \Omega$  les germes  $h^{-1}(w)$  et  $h^{-1}(w')$  ont la même topologie.*
2. *Si  $w \in \Omega$  et si  $w'' \notin \Omega$  les germes  $h^{-1}(w)$  et  $h^{-1}(w'')$  n'ont pas la même topologie.*

**DÉFINITION.** L'ouvert  $\Omega$  est appelé *l'ouvert d'équisingularité du pinceau*.

**COMMENTAIRE.** Le théorème 4.1 affirme que l'ouvert d'équisingularité coïncide avec l'ouvert des valeurs génériques (ce dernier étant défini comme le complémentaire de l'ensemble des valeurs spéciales, définies au début du §3). Un point important est que l'on a affaire à un ouvert (de Zariski).

Soit  $\mu: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  la fonction qui associe à chaque  $w \in \mathbf{P}^1$  le nombre de Milnor du germe  $h^{-1}(w)$ , en convenant que le nombre de Milnor d'un germe non réduit vaut  $+\infty$ .

**LEMME 4.3.** *La fonction  $\mu$  est semi-continue supérieurement.*

*Preuve du lemme 4.3.* Rappelons que la semi-continuité supérieure signifie ceci. Pour tout  $w \in \mathbf{P}^1$  il existe un ouvert  $W$  contenant  $w$ , tel que pour tout  $w' \in W$  on ait  $\mu(w) \geq \mu(w')$ .

Fixons  $w \in \mathbf{P}^1$ . Soit  $S$  une petite sphère de Milnor pour le germe  $h^{-1}(w)$ . Rappelons que l'équation de ce germe est  $f_w = w_2 h_1 - w_1 h_2 = 0$ . Soit  $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ . Posons  $\partial_i(f_w) = \frac{\partial f_w}{\partial z_i}$  pour  $i = 1, 2$ .

Le nombre  $\mu$  de Milnor est le nombre d'intersection à l'origine de  $\partial_1(f_w) = 0$  avec  $\partial_2(f_w) = 0$ . Maintenant, quitte à restreindre  $S$ , on peut supposer que  $S$  est aussi une sphère de Milnor pour le germe  $(\partial_1(f_w))(\partial_2(f_w)) = 0$ . Par le théorème de Lefschetz,  $\mu$  est aussi le coefficient d'enlacement dans  $S$  de l'entrelacs orienté  $(\partial_1(f_w) = 0) \cap S$  avec l'entrelacs  $(\partial_2(f_w) = 0) \cap S$ .

Si  $w'$  est proche de  $w$ ,  $\partial_i(f_{w'}) = 0$  coupe  $S$  transversalement ( $i = 1, 2$ ) et le coefficient d'enlacement dans  $S$  des entrelacs associés est égal à celui de  $\partial_i(f_w) = 0$  (invariance du coefficient d'enlacement par homotopie). Toujours par le théorème de Lefschetz, le coefficient d'enlacement dans  $S$  de  $(\partial_1(f_{w'}) = 0) \cap S$  avec  $(\partial_2(f_{w'}) = 0) \cap S$  est égal à la somme des nombres d'intersection de  $\partial_1(f_{w'}) = 0$  avec  $\partial_2(f_{w'}) = 0$  en leur divers points d'intersection dans la boule  $B$  dont le bord est la sphère  $S$ . Comme ces nombres d'intersection sont strictement positifs, on a bien l'inégalité annoncée si l'on considère le nombre d'intersection de

$$\partial_1(f_{w'}) = 0 \quad \text{avec} \quad \partial_2(f_{w'}) = 0$$

en l'origine.  $\square$

*Preuve de la proposition 4.2.* Soit  $\mu_{\min}$  la valeur minimum prise par la fonction  $\mu: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ . Il résulte de la semi-continuité que l'ensemble des  $w \in \mathbf{P}^1$  tels que  $\mu(w) = \mu_{\min}$  est un ouvert (non-vide) que nous notons  $\Omega$ .

Le théorème  $\mu$ -constant de Lê (pour les germes de courbes planes) dit que pour tous les  $w \in \Omega$ , les germes  $h^{-1}(w)$  ont la même topologie. Voir [Lê].

Finalement, pour  $w \in \Omega$  et pour  $w'' \notin \Omega$ , la topologie de  $h^{-1}(w)$  ne peut être celle de  $h^{-1}(w'')$  puisque les nombres  $\mu$  de Milnor sont différents. Ceci résulte du théorème de J. Milnor et V. Palamodov qui affirme que la codimension de l'idéal jacobien est égale au premier nombre de Betti de la fibre de Milnor. Voir [Mil] appendice B et [Pala].  $\square$

Poursuivons nos préparatifs en vue de démontrer le théorème 4.1. Soient à nouveau  $h_1$  et  $h_2$  comme au début du paragraphe 2. Dans  $U \times \mathbf{P}^1$  considérons la surface  $\Sigma$  d'équation  $\eta h_1 - \lambda h_2 = 0$ . La restriction à  $\Sigma$  des deux projections de  $U \times \mathbf{P}^1$  sur chacun des facteurs fournit deux morphismes  $P: \Sigma \rightarrow U$  et  $h': \Sigma \rightarrow \mathbf{P}^1$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma & & \\
 P \downarrow & \searrow h' & \\
 U & \xrightarrow{h} & \mathbf{P}^1.
 \end{array}$$

Le morphisme  $P$  est l'éclatement de l'idéal engendré par  $h_1$  et  $h_2$ . Il est facile de voir que  $P|_{P^{-1}(U-\{0\})} \rightarrow U - \{0\}$  est un isomorphisme tandis que  $P^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^1$ . Par conséquent,  $P$  lève l'indétermination de  $h$  et c'est la façon la plus «économique» de le faire. Mais le «hic» est que  $\Sigma$  est une surface très singulière qui n'est pas normale en général.

Nous allons maintenant comparer  $P: \Sigma \rightarrow U$  avec la résolution minimale  $\rho: \widehat{U} \rightarrow U$  construite au paragraphe 2.

Pour cela, considérons le lieu exceptionnel  $E = \rho^{-1}(0)$ . Dans  $E$ , soit  $\Delta$  la réunion des composantes dicritiques. Considérons ensuite la différence  $E - \Delta$  et son adhérence  $\text{ad}(E - \Delta)$ . Cette dernière est l'union disjointe de ses composantes connexes  $C_1, \dots, C_k$ . La configuration de chaque  $C_i$  est représentée par un sous-graphe connexe (en fait un arbre) de l'arbre de configuration de  $E$ . Après tout,  $\rho: \widehat{U} \rightarrow U$  peut être considérée comme une résolution du point lisse  $0 \in U$ . Par le théorème de P. du Val et D. Mumford, la forme intersection associée à  $E$  est négative définie. Voir [H-N-K] p. 86. Par restriction, la forme intersection associée à chaque  $C_i$  est aussi négative définie.

Soit alors  $\bar{\Sigma}$  le quotient de  $\widehat{U}$  obtenu en identifiant chaque  $C_i$  en un point (disons  $P_i$ ). Par le théorème de H. Grauert,  $\bar{\Sigma}$  peut être muni d'une (unique) structure d'espace analytique normal. (Voir [Gr].) Par construction, la restriction de  $\hat{h}$  à chaque  $C_i$  est constante. On en déduit que  $\hat{h}$  passe au quotient et fournit un morphisme  $\bar{h}: \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbf{P}^1$ . Pour la même raison, on a un morphisme  $n: \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\Sigma} & & \\
 n \downarrow & \searrow \bar{h} & \\
 \Sigma & \xrightarrow{h'} & \mathbf{P}^1.
 \end{array}$$

PROPOSITION 4.4.  $n: \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  est la normalisation de  $\Sigma$ .

*Preuve de la proposition 4.4.* Par construction, l'espace analytique  $\bar{\Sigma}$  est normal. Il est facile de vérifier que  $n$  est un morphisme fini et est un isomorphisme en restriction à un ouvert dense de points lisses. (Voir [Lo].)  $\square$

Observons que dans la courbe  $C_i$  aucune composante irréductible n'a self-intersection égale à  $-1$ , par minimalité de la résolution  $\rho$ . On en déduit que chaque point  $P_i \in \bar{\Sigma}$  est un point vraiment singulier et que  $\{P_i\}$  pour  $i = 1, \dots, k$  est la liste complète des points singuliers de  $\bar{\Sigma}$ . Par conséquent, la projection  $q: \hat{U} \rightarrow \bar{\Sigma}$  est la résolution minimale des singularités de  $\bar{\Sigma}$ . En résumé, nous obtenons donc le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5. *Il y a un grand diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{U} & & \\
 q \downarrow & \searrow \hat{h} & \\
 \bar{\Sigma} & & \\
 n \downarrow & & \\
 \Sigma & & \\
 P \downarrow & & \\
 U & \xrightarrow{h} & \mathbf{P}^1,
 \end{array}$$

où  $n$  est la normalisation de  $\Sigma$  et où  $q$  est la résolution minimale des singularités de  $\bar{\Sigma}$ .

*Preuve du théorème 4.1.* Soient donc  $w$  et  $w'$  deux valeurs génériques. Il est clair que  $h^{-1}(w)$  et  $h^{-1}(w')$  ont la même topologie. En effet, leurs transformées strictes par la résolution minimale  $\rho$  de  $h$  passent uniquement par les composantes dicritiques, qu'elles rencontrent de façon lisse et transverse. De plus, pour une composante dicritique  $D$  donnée, le nombre de points de contact de la transformée stricte de  $h^{-1}(w)$  avec  $D$  est égal au nombre de points de contact de la transformée stricte de  $h^{-1}(w')$  avec  $D$ . En effet, ces deux nombres sont égaux au degré de l'application  $\hat{h}|_D \rightarrow \mathbf{P}^1$ . Les deux germes ont donc la même résolution et, par conséquent la même topologie.

Soient maintenant  $w''$  une valeur spéciale et  $w$  une valeur générique. Par construction  $h^{-1}(w'')$  et  $h^{-1}(w)$  n'ont pas la même résolution. Mais il se pourrait tout de même que leurs arbres de résolution soient isomorphes. Nous allons montrer (et c'est là l'essentiel de la démonstration du théorème) qu'il n'en est rien.

*1<sup>er</sup> cas.* Soit  $D_a$  une composante irréductible de  $E = \rho^{-1}(0)$  telle que la restriction de  $\hat{h}$  à  $D_a$  soit constante. Soit  $w_a \in \mathbf{P}^1$  la valeur  $\hat{h}(D_a)$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $w_a \in \Omega$ .

Tout d'abord, nous avons observé précédemment que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{P}^1$ . Par construction tous les germes  $h^{-1}(w)$  pour  $w \in \Omega$  ont même topologie. La théorie de O. Zariski pour l'équisingularité des germes de courbes planes assure qu'il existe un homéomorphisme  $\Psi: (h')^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega \times \Gamma$  où  $\Gamma$  est le germe de  $h^{-1}(w)$  pour un  $w$  quelconque appartenant à  $\Omega$ . Voir [Zar]. De plus,  $\Psi$  est tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} (h')^{-1}(\Omega) & \xrightarrow{\Psi} & \Omega \times \Gamma \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Omega & \end{array}$$

On en déduit que, topologiquement,  $(\bar{h})^{-1}(\Omega)$  est isomorphe à  $\Omega \times \bar{\Gamma}$ , où  $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  est la normalisation de  $\Gamma$ .

Par conséquent si  $w_a \in \Omega$ , alors  $(\bar{h})^{-1}(\Omega)$  est topologiquement lisse. Mais c'est impossible, car  $(\bar{h})^{-1}(\Omega)$  contient l'un des points  $P_i$ , image par contraction d'une composante connexe de  $\text{ad}(E - \Delta)$ . Nous avons observé précédemment que  $P_i$  est vraiment singulier, ce qui implique que  $P_i$  n'est pas topologiquement lisse, via le théorème de D. Mumford. Voir [Mum].

*2<sup>e</sup> cas.* Supposons maintenant que  $w''$  est une valeur spéciale qui n'est pas une valeur constante prise par  $\hat{h}$  en restriction à une composante de  $E$ . Dans ces conditions, on a le lemme suivant.

**LEMME 4.6.** *Le nombre de branches de  $h^{-1}(w'')$  est inférieur ou égal au nombre de branches d'un germe générique.*

*Preuve du lemme 4.6.* Soit  $D_b$  une composante dicritique de  $E$ . Soit  $d_b$  le degré de la restriction de  $\hat{h}$  à  $D_b$ . D'après ce que nous avons dit ci-dessus, il est clair qu'un germe générique possède exactement  $\sum d_b$  branches, la somme portant sur l'ensemble des composantes dicritiques de  $E$ .

Maintenant, par hypothèse sur  $w''$ , la transformée stricte de  $h^{-1}(w'')$  ne rencontre  $E$  qu'aux composantes dicritiques. Pour estimer le nombre de branches de  $h^{-1}(w'')$  plaçons-nous en un point de contact  $x \in D_b$  de la transformée stricte de  $h^{-1}(w'')$  avec  $D_b$ . Soit  $\text{deg}(\hat{h}|_{D_b}; x)$  le degré local en  $x$  de la restriction  $\hat{h}|_{D_b}$ . Ce degré est égal au nombre d'intersection en  $x$  de  $D_b$  avec  $\hat{h}^{-1}(w'')$ . Or, ce nombre d'intersection est inférieur ou égal au nombre de branches en  $x$  de  $\hat{h}^{-1}(w'')$ . Comme  $d_b$  est égal à  $\sum_x \text{deg}(\hat{h}|_{D_b}; x)$  (la somme portant sur tous les points de contact  $x$  de  $\hat{h}^{-1}(w'')$  avec  $D_b$ ) le lemme est démontré.  $\square$

## REMARQUES SUR LA PREUVE DU LEMME 4.6.

1. Supposons que  $D_b$  et  $D_{b'}$  sont deux composantes dicritiques distinctes et que  $D_b \cap D_{b'} = \{Q\}$ . Supposons que  $w'' = \hat{h}(Q)$ . Alors le nombre de branches de  $h^{-1}(w'')$  est strictement inférieur au nombre générique de branches. En effet, dans la formule d'Hurwitz les branches de  $h^{-1}(w'')$  en  $Q$  interviennent à la fois pour  $D_b$  et pour  $D_{b'}$ .

2. Il y a égalité entre le nombre de branches de  $h^{-1}(w'')$  et le nombre générique de branches si et seulement si :

- i)  $w''$  n'est pas égal à  $\hat{h}(Q)$  pour un point  $Q$  qui est intersection de deux dicritiques.
- ii) en chaque point de contact de la transformée stricte de  $h^{-1}(w'')$  avec un dicritique, cette transformée stricte est composée de branches lisses, toutes transverses au dicritique.

Dans tous les cas où il y a inégalité stricte, la démonstration du théorème est achevée car, banalement, deux germes topologiquement équivalents ont le même nombre de branches.

Reste donc finalement le cas où il y a égalité entre les nombres de branches. Alors un calcul direct basé sur la méthode de C. Clemens et N. A'Campo (voir [A'C]) montre que le nombre  $\mu$  de Milnor de  $h^{-1}(w'')$  est strictement supérieur au  $\mu$  générique. Plus précisément, on a le résultat suivant.

LEMME 4.7. *Soit  $w''$  une valeur spéciale satisfaisant les conditions de la remarque 2 ci-dessus. Alors la différence entre le  $\mu$  de Milnor  $\mu''$  de  $h^{-1}(w'')$  et le  $\mu$  générique  $\mu_{\text{gen}}$  est donnée par  $\mu'' - \mu_{\text{gen}} = \sum (c_x + \mu_x - 1)$  la somme portant sur tous les points de contact  $x$  de la transformée stricte de  $h^{-1}(w'')$  avec les dicritiques. Le nombre  $c_x$  est le nombre de branches en  $x$  et  $\mu_x$  est le  $\mu$  de Milnor du germe de courbe en  $x$ .*

REMARQUE SUR LA PREUVE DU THÉORÈME 4.1. On pourrait objecter à la démonstration que nous venons de donner qu'elle traite un peu légèrement le cas des germes du pinceau qui ne sont pas réduits. Supposons donc que  $w \in \mathbf{P}^1$  est tel que le germe  $h(z) = w$  n'est pas réduit. Il est facile de voir que  $w$  est une valeur spéciale. On affirme que  $w \notin \Omega$ . Il y a pour cela tout d'abord une raison idéologique. En effet, la topologie d'un germe non nécessairement réduit est représentée par un entrelacs dont chaque composante est affectée d'un poids entier  $> 0$  qui représente la multiplicité d'un point générique de la branche correspondant à la composante considérée. Comme un germe générique est réduit, l'entrelacs avec poids correspondant à  $h(z) = w$

ne peut pas être isomorphe à l'entrelacs d'un germe générique. Mais en fait l'entrelacs réduit d'un germe non réduit ne peut pas non plus être isomorphe à l'entrelacs d'un germe générique. En effet, s'il existe une composante  $D_a$  de  $E$  telle que la restriction de  $\hat{h}$  à  $D_a$  est constante, la démonstration donnée s'applique sans changement. Sinon, comme au moins une branche du germe  $h(z) = w$  est non réduite, la preuve du lemme 4.6 montre que ce germe a un nombre de branches strictement inférieur au nombre de branches d'un germe générique.

REMARQUE SUR LE THÉORÈME 4.5. On a vu que  $P$  est l'éclatement de l'idéal  $(h_1, h_2)$  engendré par  $h_1$  et  $h_2$ . On sait alors que la composition  $P \circ n$  de  $P$  avec la normalisation  $n: \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  est aussi l'éclatement d'un idéal qui n'est autre que la clôture intégrale  $I$  de l'idéal  $(h_1, h_2)$  dans l'anneau analytique local régulier de dimension deux  $\mathcal{O}_{U,o}$ . Au sens de Zariski-Samuel (voir l'appendice 5 de [Z-S]) l'idéal  $I$  est un idéal complet. Par définition (voir [Sp]) les singularités de  $\bar{\Sigma}$  sont des singularités sandwich. Notre construction donne à partir de la résolution de  $h_1 h_2$  la résolution minimale de ces singularités sandwich. Inversément, si  $I \subset \mathcal{O}_{U,o}$  est un idéal complet et si  $h_1$  et  $h_2$  sont des éléments superficiels de  $I$  (voir [Z-S] vol. 2, p. 285) tels que la multiplicité de l'idéal  $(h_1, h_2)$  est égale à celle de  $I$ , un théorème de Rees montre que  $I$  est la clôture intégrale de  $(h_1, h_2)$ . De ceci résulte que toutes les singularités sandwich sont obtenues après normalisation d'un système linéaire de germes de courbes planes.

## § 5. BONNES COMPOSANTES DICRITIQUES

Comme indiqué dans l'introduction, notre point de vue sur la  $C^0$ -suffisance est le suivant. Le germe  $f$  étant donné, nous cherchons une condition sur la multiplicité de  $g$  pour que les germes  $f - \lambda g = 0$  aient tous la même topologie, quel que soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Considérant le pinceau  $\eta f - \lambda g = 0$  nous cherchons donc à savoir quand son ouvert d'équisingularité  $\Omega$  contient  $\mathbf{C} = \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$ .

REMARQUE. Il découle facilement de la description des valeurs spéciales donnée au paragraphe 4 que l'ouvert d'équisingularité d'un pinceau est égal à  $\mathbf{P}^1$  tout entier si et seulement si :

1. le pinceau est résolu en un seul éclatement;
2. le degré de  $\hat{h}|_D \rightarrow \mathbf{P}^1$  est égal à 1, où  $D$  est le dicritique créé par l'éclatement.