Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE

Autor: Trang, LÊ Dung / WEBER, Claude

Kapitel: §6. Étude d'un cas particulier

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63285

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans le paragraphe 7, nous déterminons le degré de C^0-suffisance d'un germe f en cherchant à quelle condition sur la multiplicité de g les composantes dicritiques de $h = \frac{f}{g}$ sont toutes bonnes.

§6. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

Considérons le germe de fonction méromorphe donné par $k(x,y) = \frac{x^v}{y^u}$ où u et v sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. La résolution minimale de $k(x,y)$ est donnée par la processus suivant. On écrit $u = ru'$ et $v = rv'$ avec $\mathrm{pgcd}(u',v') = 1$. On construit l'approximation lente de $\frac{u'}{v'}$. Pour plus de détails sur ce procédé, voir [L-M-W2] début de l'appendice. Le point de départ est fourni par le développement en fraction continue de $\frac{u'}{v'}$ donné par:

$$u'/v' = h^0 + \cfrac{1}{h^1 + \cfrac{1}{h^2 + \cdots + \cfrac{1}{h^s}}}$$

où l'on a $0 \leq h^0$, $1 \leq h^i$ pour $1 \leq i \leq s-1$, $2 \leq h^s$. Posons $m = \sum_{i=0}^{s} h^i$.

LEMME 6.1.

1. *Il y a exactement une composante dicritique et c'est la composante obtenue après m éclatements. Elle correspond précisément au nombre rationnel $\frac{u'}{v'}$ de l'approximation lente.*

2. *La transformée stricte de $y^u = 0$ est une curvette de la composante qui correspond au sommet le plus à gauche. La transformée stricte de $x^v = 0$ est une curvette du sommet le plus à droite.*

3. *Le degré de la restriction de $\hat{k}$ à la composante dicritique est égal à $r = \mathrm{pgcd}(u,v)$.*

4. *Les sommets qui sont à gauche de la composante dicritique ont valuation < 0 tandis que ceux qui sont à droite ont valuation > 0.*

Conséquence du lemme 6.1 (importante pour la suite). La composante dicritique est bonne si et seulement si $u = 1$. En effet $u = 1$ est équivalent à:

1. $r = 1$, i.e. le degré de la restriction de $\hat{k}$ au dicritique est égal à 1.

2. Les composantes du lieu exceptionnel qui rencontrent le dicritique ont valuation < 0 (en fait il n'y a qu'une composante du lieu exceptionnel qui rencontre le dicritique).

Preuve du lemme 6.1. On observe qu'il ne s'agit de rien d'autre que de construire la résolution de $x^v - y^u = 0$. Concrètement, en utilisant les calculs du début de l'appendice de [L-M-W2] on vérifie qu'en un sommet $\frac{a}{b}$ de l'approximation lente, la valuation de $\hat{k}$ sur la composante qui correspond à ce sommet vaut $av - bu$. Elle s'annule donc uniquement au sommet $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$. Les sommets qui sont à droite de $\frac{u'}{v'}$ satisfont l'inégalité $\frac{u'}{v'} < \frac{a}{b}$ tandis que ceux qui sont à gauche satisfont $\frac{a}{b} < \frac{u'}{v'}$. $\square$

Utilisation du lemme 6.1. Revenons au paragraphe 2 et à la méthode proposée pour éliminer les indéterminations de $h = \frac{h_1}{h_2}$. Dans la résolution minimale de $h_1 h_2 = 0$ les éventuels points d'indétermination se trouvent au point d'intersection du diviseur Z des zéros avec le diviseur P des pôles. Localement, la situation est exactement celle du lemme. On obtient donc une résolution de h en insérant à la place du point d'indétermination le lieu exceptionnel donné par le lemme 6.1. Le point 2 du lemme dit exactement comment se fait le recollement. L'entier $-u$ est le coefficient dans P de la composante de P qui passe par le point d'indétermination tandis que v est le coefficient de la composante de Z qui passe par le point d'indétermination. Ceci complète ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 3. Connaissant la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$ (par exemple via sa résolution minimale) on peut déterminer *effectivement* la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. En effet, la valuation de $\hat{h}$ le long de chaque composante du lieu exceptionnel se calcule par les moyens habituels. Elle peut, par exemple, se ramener à un calcul de coefficients d'enlacement. Ensuite, chaque point d'indétermination est remplacé par le segment décrit par le lemme 6.1. Finalement, on obtient une résolution de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$ en ajoutant, en plus des flèches colorées de $h_1 h_2 = 0$ des flèches d'une troisième couleur à chaque dicritique D_b en nombre égal au degré de l'application $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$.

§7. Le calcul du degré de C^0-suffisance

Soit $\pi : \Sigma \to U$ la résolution minimale de f. Soit D une composante irréductible de $\pi^{-1}(0)$ et soit γ une curvette de D. Rappelons qu'il s'agit d'un germe de courbe lisse, transverse à D en un point de D qui est lisse dans la transformée totale de $f = 0$ par π. Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel $q_D = I(f, \gamma_*)/I(l, \gamma_*)$; dans cette formule l représente une droite transverse à $f = 0$ et γ_* est l'image de γ par π (voir le paragraphe 1).