3. Toujours préparation, mais à la Weierstrass

Donnons enfin, comme promis, une explication informelle pourquoi le th. 2 s'appelle une loi de réciprocité. D'abord, quelques rappels sur la théorie classique. Si F est un corps local au sens classique, $\chi \in H^1(F, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ un caractère d'ordre m de son groupe de Galois absolu, et α un élément du groupe multiplicatif F^*, on a $\delta_m\alpha \cup \chi \in H^2(F, \mu_m) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, où δ_m est le cobord de la suite de Kummer pour la multiplication par m. Ceci définit un homomorphisme

$$\phi_F : H^1(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(F^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

dont on sait (cf. [16], [17]) qu'il est le dual de l'application de réciprocité locale. Pour la théorie globale, on introduit des idèles et on définit l'application de réciprocité globale comme le produit des applications locales (on suppose ici pour simplifier qu'il n'y a pas de places réelles). Ensuite, on vérifie que le produit est en fait une somme, et que le fait que l'application passe au quotient par l'image diagonale du groupe multiplicatif de notre corps global équivaut au fait que la suite d'Albert-Brauer-Hasse-Noether pour le groupe de Brauer est un complexe (voir [18]).

Maintenant, on peut procéder de façon analogue pour le corps K du théorème 2, en remplaçant les groupes multiplicatifs par les K_2-groupes de Milnor. Pour les localisés $K_\mathfrak{p}$, on accouple $\chi \in H^1(K_\mathfrak{p}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ avec $\alpha \in K_2^M(K_\mathfrak{p})$ pour obtenir $h^2_{m,K_\mathfrak{p}}(\alpha) \cup \chi \in H^3(K_\mathfrak{p}, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ en utilisant le th. 1, ce qui définit comme en haut une application de réciprocité locale entre $K_2^M(K_\mathfrak{p})$ et le groupe de Galois absolu de $K_\mathfrak{p}$. Ensuite, on peut définir des K_2-idèles de K ainsi qu'une application de réciprocité globale comme le produit des applications locales; comme dans le cas classique, le fait que cette application passe au quotient par l'image diagonale de $K_2(K)$ se réduit via le symbole cohomologique à notre th. 2.

Remarquons enfin qu'en général, pour n'importe quel schéma normal, intègre, de dimension d et de type fini sur $\mathbf{Z}$, on peut introduire la notion de K_d-idèles et énoncer des «lois de réciprocité». Le miracle est que par passage à un sous-schéma fermé convenable et puis par localisation en des points de codimension 1 et 2, ces énoncés se réduisent respectivement à la loi de réciprocité classique et à la Remarque suivant le th. 2. Le cas local de dimension 2 est donc le cas qui, tous dévissages faits, reste à traiter, mais la formulation du cas général appartient à la théorie des «chaînes de Parshin» pour laquelle on renvoie le lecteur à [9].

3. Toujours préparation, mais à la Weierstrass

Ce chapitre est consacré à quelques outils d'algèbre commutative qui seront utilisés dans la suite. Le résultat fondamental est la conséquence suivante du théorème de structure pour les anneaux locaux complets.

Théorème (I. S. Cohen). *Soit A un anneau local normal complet de dimension 2, à corps résiduel $\mathbf{F}$ (non nécessairement fini). Alors A est fini sur un anneau de séries formelles de la forme $O_k[[T]]$, où O_k est l'anneau des entiers d'un corps k complet pour une valuation discrète au même corps résiduel $\mathbf{F}$.*

Voir Nagata [12], Cor. 31.6 pour une démonstration. Ce théorème est très utile car la structure des anneaux de la forme $O_k[[T]]$ est bien connue.

LEMME 3.1. *Soit O_k comme en haut. Alors l'anneau $O_k[[T]]$ est factoriel, et ses éléments premiers sont l'uniformisante π de O_k, ainsi que les «polynômes de Weierstrass», c'est-à-dire les polynômes irréductibles dans $O_k[T]$ de la forme $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$, où tous les a_i sont divisibles par π.*

Le lemme est une conséquence du théorème de préparation de Weierstrass. Voir, par exemple, l'ouvrage de Lang [10].

Les idéaux premiers de hauteur 1 dans $O_k[[T]]$ sont donc engendrés par l'uniformisante π ou par un polynôme de Weierstrass. Les corps résiduels correspondants sont respectivement $\mathbf{F}((T))$ ou des extensions finies du corps valué complet k, et par conséquent sont munis de valuations discrètes canoniques pour lesquelles ils sont complets. Mais il en est alors de même pour A (car il est fini sur $O_k[[T]]$), ce qui montre bien que les corps $K_{\mathfrak{p}}$ du th. 1 sont des corps locaux de dimension 2. Le théorème 1 découle donc du th. $1'$.

Par ailleurs, l'anneau $O_k[[T]]$ est le complété de l'anneau local $B = O_k[T]_{(\pi,T)}$. Nous pouvons dériver du lemme 3.1 la description suivante du hensélisé B^h qui sera utilisée dans la démonstration du théorème 2.

LEMME 3.2. *L'anneau B^h est un anneau local noethérien régulier, donc factoriel, de dimension 2, dont le complété est $O_k[[T]]$. Ses éléments premiers sont l'uniformisante π et les polynômes de Weierstrass. Par conséquent, le morphisme naturel $\operatorname{Spec} O_k[[T]] \to \operatorname{Spec} B^h$ est bijectif, et les corps résiduels des idéaux premiers correspondants sont identiques sauf pour (0) et (π), où le corps résiduel de $O_k[[T]]$ est le complété de celui de B^h.*

Démonstration. La première assertion résulte les propriétés générales de la hensélisation (cf. [11], Chap. 1.4) et la troisième est triviale à partir de la seconde. Pour cette dernière, on remarque d'abord que $O_k[[T]]$ étant fidèlement plat sur B^h, il suffit d'établir une bijection entre les idéaux premiers de hauteur 1 de B et ceux de $O_k[[T]]$. Dans B, ce sont des idéaux principaux engendrés par π ou par certains polynômes irréductibles de $O_k[T]$ contenus dans (π, T). Soit f un tel polynôme. Comme $O_k[[T]]$ est fidèlement plat sur B, il existe un idéal premier de $O_k[[T]]$ au-dessus de (f), engendré par un polynôme de Weierstrass w selon le lemme 3.1. Mais comme les polynômes de Weierstrass sont tous contenus dans B, on a forcément $f = w$, ce qui donne la bijection désirée.