4. RÉDUCTIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

4. RÉDUCTIONS

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème 2. Gardons les notations du chapitre 1. Tout d'abord, *on va vérifier que* $\omega_{\mathfrak{p}} = 0$ *pour presque tous les* $\mathfrak{p}$ *de hauteur* 1.

Soit X le sous-schéma ouvert de $\operatorname{Spec} A$ obtenu en enlevant le point fermé. La suite de localisation en cohomologie étale (cf. Milne [11], Chap. III, Prop. 1.25) nous fournit par fonctorialité le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H^4_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array} \tag{4.1}$$

Ici la flèche verticale à droite est un isomorphisme par excision (Milne [11], Chap. III, Cor. 1.28). Quant à la flèche horizontale en bas, en continuant la suite de localisation on obtient la suite exacte

$$H^3(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Mais les termes aux deux extrémités sont nuls car $A^h_{\mathfrak{p}}$ étant hensélien, sa cohomologie est la même que celle de son corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ (cf. Artin [2], Chap. III., Thm. 4.9), ce qui est un corps de dimension cohomologique 2, on l'a vu. Ceci démontre le second isomorphisme.

Soit maintenant S un ensemble fini de points fermés de X, et considérons la suite de localisation

$$H^3(X - S, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_S(X, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Ici, on a $H^4_S(X, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$, donc par passage à la limite sur les S (ce qui est permis dans notre cas par Milne [11], Chap. III, Lemma 1.16), on a la suite exacte

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}). \tag{4.2}$$

En particulier, l'image d'un élément $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par un homomorphisme $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$ est nulle pour presque tout $\mathfrak{p}$. Mais par (4.1), cette image n'est autre que la restriction $\omega_p \in H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})$, et on obtient le résultat.

Ensuite, on va utiliser le théorème de Cohen pour montrer le

LEMME 4.3. *Dans l'énoncé du théorème 2, on peut supposer* $A = O_k[[T]]$.

Démonstration. Soit A comme au th. 2, et notons par $\widetilde{K}$ le corps de fractions d'un anneau de la forme $O_k[[T]]$ sur lequel A est fini selon Cohen. Alors pour tout idéal premier $\widetilde{\mathfrak{p}}$ de hauteur 1 de $O_k[[T]]$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}|\widetilde{\mathfrak{p}}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Cor}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sum \mathrm{Cor}} \\ H^3(\widetilde{K}, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\widetilde{K}_{\widetilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

En effet, il existe un tel diagramme pour tous les H^i $(i \geqq 0)$, et il suffit de vérifier la fonctorialité pour $i = 0$. On peut supposer de plus que l'extension $K \mid \widetilde{K}$ est séparable et l'assertion est alors une conséquence du théorème sur les extensions de valuations (cf. Serre [16], chap. I, §2.3).

D'autre part, par le th. 1, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ {\scriptstyle \mathrm{Cor}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ H^3(\widetilde{K}_{\widetilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

dont la commutativité se vérifie de la même manière que l'énoncé analogue (cf. Serre, *loc. cit.*) pour le groupe de Brauer d'un corps local (de dimension 1). Ces deux diagrammes impliquent la réduction cherchée.

On suppose donc désormais $A = O_k[[T]]$.

CONVENTION. On va noter par A° le hensélisé de l'anneau $O_k[T]_{(\pi,T)}$, *avec le même* O_k que dans la définition de A. Son corps de fractions sera noté K°. Par contre, en général, nous continuerons de noter par B^h tout anneau qui est comme dans le lemme 3.2. Veuillez accepter toutes nos excuses pour cet inconvénient.

L'idée de la démonstration du théorème 2 est de comparer la suite d'homomorphismes figurant dans l'énoncé à un complexe auxiliaire en K-théorie de Milnor par le symbole cohomologique. Or l'image de $h^d_{m,K}$ est contenue dans $H^d(K, \mu_m^{\otimes d})$, donc pour pouvoir bénéficier de cet outil il faut remplacer $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par exemple par $H^2(K, \mu_m^{\otimes 2})$. Comme $\mathbf{F}$ est fini, la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un homomorphisme

$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^1\big(\mathbf{F}, H^2(K^{hs}, \mu_m^{\otimes 2})\big)$, où K^{hs} est le corps de fractions du hensélisé strict A^{hs}. Mais cet homomorphisme n'est un isomorphisme que si K^{hs} est de p-dimension cohomologique 2 pour tout p divisant m, ce qui n'est pas clair. Par contre si l'on remplace A par A°, le corps de fractions $K^{\circ\circ}$ du hensélisé strict le sera bien, étant un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1 (cf. Serre [15], chap. 4.3, prop. 11). La réduction suivante est donc :

LEMME 4.4. *On peut remplacer A par A° dans l'énoncé du th. 2.*

Démonstration. La suite de localisation (4.2) nous fournit par fonctorialité le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d^\circ} & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array} \tag{4.5}$$

où $X^\circ = \operatorname{Spec} A^\circ - \{(\pi, T)\}$, et $\mathfrak{p}^\circ$ parcourt les points fermés de X° qui sont en bijection avec ceux de X selon le lemme 3.2. Tenant compte de l'identification (4.1), pour achever la réduction il suffit de montrer que l'homomorphisme vertical au milieu induit un isomorphisme $\operatorname{Im} d^\circ \cong \operatorname{Im} d$. Une chasse au diagramme montre alors que pour cela il suffit de voir deux choses :

(1) Dans le diagramme (4.5), l'homomorphisme vertical à droite est injectif.

(2) Pour tous les $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^\circ$ correspondants, l'homomorphisme naturel

$$H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

Pour prouver (1), on considère les isomorphismes

$$X \cong X^\circ \times_{\operatorname{Spec} A^\circ} \operatorname{Spec} A \cong \varprojlim (X^\circ \times_{\operatorname{Spec} A^\circ} \operatorname{Spec} R),$$

où la limite projective est prise suivant les $\operatorname{Spec} R$, avec R un sous-anneau de A de type fini sur A°. Pour un tel anneau, le morphisme naturel $A^\circ \to R$ possède une section par le théorème d'approximation d'Artin [1], donc le morphisme $H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(X^\circ \times_{\operatorname{Spec} A^\circ} \operatorname{Spec} R, \mu_m^{\otimes 2})$ a également une section et on obtient le résultat par passage à la limite (tenant de nouveau compte de [11], Chap. III, Lemma 1.16).

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et le diagramme analogue pour A°.

$$
\begin{tikzcd}
H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ddr] & & H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "\cong"] & \\
H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr] \arrow[ddr] & & H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[ddr, "\cong"] & \\
& H^3(K^\circ_{\mathfrak{p}^\circ}, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "f"] & & H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(\mathrm{Spec}(A^\circ_{\mathfrak{p}^\circ})^h, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[d, "g"] \\
& H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr, "\cong"] & & H^4_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Spec}\, A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})
\end{tikzcd}
$$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme h du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que f l'est. Mais par le th. 1, les groupes $H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})$ et $H^3(K^\circ_{\mathfrak{p}^\circ}, \mu_m^{\otimes 2})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec f. Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par fonctorialité.

5. Conclusion

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K-théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit B^h un anneau comme dans le lemme 3.2, K^h son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de B^h est parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si $\mathfrak{q}$ parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de B^h, on définit le complexe

(M)
$$K_2(K^h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{q}} K_1\big(\kappa(\mathfrak{q})\big) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Z}$$

comme suit : l'homomorphisme α est somme directe des résidus de Milnor $\partial^M_{1,\mathfrak{q}}$ (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de K^h induites par les