

5. Conclusion

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et le diagramme analogue pour A° .

$$\begin{array}{ccc}
 H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_{p^\circ}^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow h \\
 H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 & & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow g \\
 & & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 & & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2})
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc}
 H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2})
 \end{array}$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme h du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que f l'est. Mais par le th. 1, les groupes $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$ et $H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec f . Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par functorialité.

5. CONCLUSION

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K -théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit B^h un anneau comme dans le lemme 3.2, K^h son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de B^h est parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si \mathfrak{q} parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de B^h , on définit le complexe

$$(\mathbf{M}) \quad K_2(K^h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{q}} K_1(\kappa(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Z}$$

comme suit: l'homomorphisme α est somme directe des résidus de Milnor $\partial_{1,\mathfrak{q}}^M$ (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de K^h induites par les

divers q (on voit tout de suite qu'il n'y a qu'un nombre fini de résidus qui n'annulent pas un élément donné de $K_2(K^h)$), et $\beta = \sum f_q v_q$, où v_q est la valuation induite sur le corps résiduel $\kappa(q)$ de q par l'idéal maximal de B^h , f_q son degré résiduel. (En fait, $v_q = \partial_{0, v_q}^M$ et la multiplication par f_q est précisément la norme $K_0(\kappa(v_q)) \rightarrow K_0(\mathbf{F})$.)

LEMME 5.1. *(M) est un complexe.*

Démonstration. Par le lemme 3.2, le groupe multiplicatif de K^h est engendré par les unités de B^h , l'uniformisante π , la variable T et les éléments de la forme P/T^n , où P est un polynôme de Weierstrass de degré n . Il suffit donc de vérifier l'égalité $\beta\alpha(\langle a, b \rangle) = 0$ quand a et b sont parmi ces générateurs. Les cas où a ou b est une unité, ou bien $a = \pi$, $b = T$, sont triviaux. Si P est de Weierstrass, $\beta\alpha(\langle \pi, P \rangle) = n - e_q f_q = 0$, (où e_q est l'indice de ramification de v_q) car \mathbf{F} est supposé parfait. Vu la multiplicativité et l'anticommutativité des symboles $\langle a, b \rangle$ (cf. Bass-Tate [3]), il nous reste à traiter les cas où $a = P/T^n$, $b = Q/T^k$, ou bien $a = P/T^n$, $b = T$. Sur de tels $\langle a, b \rangle$ le résidu $\partial_{1, (\pi)}^M$ est trivial, donc on peut se borner aux autres places de K^h . Or elles peuvent être identifiées à des places du corps de fonctions $\mathbf{F}(T)$ par le morphisme naturel $\text{Spec } B_\pi^h \rightarrow \text{Spec } \mathbf{F}[T]$. Si v est une place de $\mathbf{F}(T)$, triviale sur \mathbf{F} , qui ne provient pas d'une place de B_π^h , on a, grâce à la normalisation par $1/T^n$,

$$\partial_{1, v}^M(\langle a, b \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = T \text{ et } v \text{ est la place à l'infini;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant si v_π est la valuation de k , \mathfrak{p} une place de $\mathbf{F}(T)$, $v_\mathfrak{p}$ le prolongement unique de v_π sur le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ avec degré résiduel $f_\mathfrak{p}$, on a la formule $v_\pi \circ N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} = f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}$, ce qui nous donne

$$\beta\alpha(\langle a, b \rangle) = v_\pi \circ \sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1, \mathfrak{p}}^M(\langle a, b \rangle)$$

où \mathfrak{p} parcourt les places de $\mathbf{F}(T)$ triviales sur \mathbf{F} (y compris la place à l'infini, car $v_\pi(1) = 0$). Mais la loi de réciprocité de Bass-Tate ([3], chap. I.5) nous dit que $\sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1, \mathfrak{p}}^M = 0$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Le complexe du lemme peut être largement généralisé; en fait, il peut être construit pour n'importe quel anneau local noethérien excellent de dimension 2. Pour voir $\beta\alpha = 0$ dans ce cas, on montre d'abord par un argument de normes que l'on peut remplacer l'anneau par son complété, puis par un autre argument de normes et le théorème de Cohen on se réduit au cas de $O_k[[T]]$, ce qui se traite comme dans le lemme ci-dessus. On n'a pas besoin d'hypothèse sur le corps résiduel; le fait que l'anneau soit excellent assure la validité de la formule $n = ef$.

Enfin, nous signalons que Kato [7] définit un complexe encore plus général, pour n'importe quel schéma excellent, qui est un analogue du complexe de Gersten-Quillen en K -théorie de Milnor. Mais la vérification du fait que ce soit un complexe se réduit immédiatement au cas mentionné ci-dessus.

Maintenant rien ne nous empêche de finir la démonstration du th. 2. Soient A° , K° comme au chapitre précédent, $A^{\circ\circ}$ le hensélisé strict de A° avec corps de fractions K° . $A^{\circ\circ}$ n'est autre que le hensélisé de $O_k^{nr}[T]_{(\pi, T)}$, et comme on l'a déjà remarqué, $K^{\circ\circ}$ est de dimension cohomologique 2. Donc la suite spectrale de Hochschild-Serre induit un isomorphisme $H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2}))$. De même, si \mathfrak{p}° est un idéal premier de hauteur 1 de A° , la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale (cf. Milne [11], p. 106) induit un isomorphisme $H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}))$, car on a pour tout $i \geq 0$ des isomorphismes

$$(5.2) \quad H^i(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} H^i(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})$$

(où les $\mathfrak{p}^{\circ\circ}$ sont les idéaux premiers de $A^{\circ\circ}$ au-dessus de \mathfrak{p}°) et les corps $K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}$ sont de dimension cohomologique 2. Quant à la vérification de (5.2), on peut supposer $i = 0$, puis remplacer les anneaux en question par leurs complétés, et alors on peut de nouveau invoquer [16], chap. I, par. 2.3, le théorème sur les extensions de valuations.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbf{F}, K_2(K^{\circ\circ})/m) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^1(\mathbf{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} K_2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ})/m) & \xrightarrow{\partial^M} & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^1(\mathbf{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} H^2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \end{array}$$

(où, bien sûr, $K_2(K^{\circ\circ})/m$ veut dire $K_2(K^{\circ\circ})/mK_2(K^{\circ\circ})$ etc.) Remarquons que l'homomorphisme marqué ∂^M est induit par le composé de deux résidus de Milnor, comme dans le complexe (\mathbf{M}) (noter, cependant, que tous les $f_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}$ sont égaux à 1), et ∂ est induit par le composé de deux résidus de Hochschild-Serre. Donc la commutativité du deuxième quadrant en haut est assurée par le lemme 2.4; la commutativité du premier est triviale. La ligne en bas est essentiellement la suite du th. 2, la seule différence étant que le composé des

deux résidus qui induit l'isomorphisme du th. 1 tombe dans $H^1(\kappa(v_p), \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$, il faut donc ajouter une corestriction pour l'extension finie de corps $\kappa(v_p) | \mathbf{F}$ pour arriver à $H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$. Mais l'isomorphisme de ce dernier groupe avec $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ n'est pas affecté par les corestrictions. Enfin les deux quadrants en bas commutent par des propriétés formelles de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Une application du lemme 5.1 (avec $A^{\circ\circ}$ à la place de B^h) montre que la première ligne est un complexe. D'autre part, le théorème de Merkuriev-Sousline et le fait que \mathbf{F} soit de dimension cohomologique 1 entraînent la surjectivité du premier homomorphisme vertical en haut. Une chasse au diagramme montre alors que la ligne en bas est aussi un complexe, ce qu'il fallait démontrer.

REFERENCES

- [1] ARTIN, M. Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Pub. Math. IHES* 36 (1969), 23–58.
- [2] ——— *Grothendieck Topologies*. Harvard University, 1961.
- [3] BASS, H. and J. TATE. The Milnor Ring of a Global Field, in: H. Bass (ed.), *Algebraic K-theory II*. Springer LNM 342, 1973.
- [4] BLOCH, S. *Lectures on Algebraic Cycles*. Duke University, 1980.
- [5] FROSSARD, E. *Thèse*. Université de Paris-XI, Orsay, 1995.
- [6] KATO, K. A generalization of local class field theory by using K -groups II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 27 (1980), 603–683.
- [7] ——— Milnor K -theory and the Chow group of zero-cycles, in: Bloch et al. (eds.), *Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory. Contemp. Math., vol. 55*, 241–263, AMS, Providence, 1986.
- [8] ——— A Hasse principle for two-dimensional local fields. *J. reine angew. Math.* 366 (1986), 142–183.
- [9] KATO, K. and S. SAITO. Global class field theory of arithmetic schemes, in: S. Bloch et al. (eds.), *Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory. Contemp. Math., vol. 55*, 255–331, AMS, Providence, 1986.
- [10] LANG, S. *Algebra* (3rd ed.). Addison-Wesley, 1993.
- [11] MILNE, J. S. *Etale Cohomology*. Princeton University Press, 1980.
- [12] NAGATA, M. *Local Rings*. Wiley-Interscience, New York, 1952.
- [13] PERRIN-RIOU, B. Systèmes d'Euler et représentations p -adiques. Prépublication Orsay 96-04.
- [14] SAITO, S. Class field theory for curves over local fields. *J. Number Theory* 21 (1985), 44–80.