3.2. Liens avec la sommation de Cauchy

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Démonstration. On considère la fonction $b(y) = a(y+x-1)$. On a :

$$R_b(y) = R_a(y+x-1) - \int_1^2 R_a(t+x-1)\,dt = R_a(y+x-1) - \int_x^{x+1} R_a(t)\,dt\,.$$

D'où

$$R_b(1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+x-1) = R_a(x) - \int_x^{x+1} R_a(t)\,dt\,.$$

Or $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} R_a(t)\,dt = -a(x)$, et le résultat en découle. □

EXEMPLE 6.

$$\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+x} = \ln(x) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi\,.$$

3.2. LIENS AVEC LA SOMMATION DE CAUCHY

Dans ce paragraphe, a désigne une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$.

PROPOSITION 3.2. *Si $R_a(x)$ tend vers une limite finie quand $x \to \infty$, alors la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ converge au sens de Cauchy, et en notant $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ sa somme de Cauchy, on a la relation :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \lim_{N\to\infty} \int_1^N a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. Soit N un entier naturel > 1. En sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n)\,,$$

il vient :

$$R_a(1) - R_a(N) = a(1) + \cdots + a(N-1)\,.$$

D'où :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N)\,.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) + \lim_{N\to\infty} R_a(N) .$$

En intégrant entre n et $n+1$ l'équation aux différences

$$R_a(x) - R_a(x+1) = a(x) ,$$

puis en sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$, il vient:

$$-\int_N^{N+1} R_a(t)\, dt = \int_1^N a(t)\, dt .$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient la relation:

$$-\lim_{N\to\infty} R_a(N) = \lim_{N\to\infty} \int_1^N a(t)\, dt . \qquad \square$$

REMARQUE 4. Si $R_a(x) + \int_1^x a(t)\, dt$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq 1}\left(a(n) - \int_n^{n+1} a(t)\, dt\right)$ converge au sens de Cauchy, et on a:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) - \int_n^{n+1} a(t)\, dt \right) .$$

EXEMPLE 7.

$$\gamma = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \right) .$$

La proposition 3.2 admet une sorte de réciproque:

PROPOSITION 3.3. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} a(n+x)$ *converge (au sens de Cauchy) normalement sur tout compact de* $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ *et y définit une fonction analytique de type exponentiel* $\alpha < \pi$ *alors:*

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\, dx .$$

Si on suppose en outre que $\int_1^{\infty} a(t)\, dt$ *converge alors:*

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^{\infty} a(t)\, dt .$$

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\,dx$ vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction R_a. De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t)\,dt = \int_1^{\infty} a(t)\,dt\,. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$ avec $y > 0$, il vient la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y}\int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt\,.$$

4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

4.1. LINÉARITÉ

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ respectivement dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors pour tout λ, μ dans $\mathbf{C}$, $\lambda a + \mu b$ est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par) $\alpha := \mathrm{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$ dans le demi-plan P et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b\,.$$

Il en résulte que l'application qui à une série $\sum a(n)$ associe sa somme de Ramanujan est $\mathbf{C}$-linéaire.

4.2. TRANSLATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors pour tout entier $N > 1$ la translatée $E^N(a)$ est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P et on a la