

## 4.2. Translation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

*Démonstration.* La fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx$  vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction  $R_a$ . De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t) dt = \int_1^{\infty} a(t) dt. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction  $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$  avec  $y > 0$ , il vient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y} \int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$$

#### 4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

##### 4.1. LINÉARITÉ

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  respectivement dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $\lambda a + \mu b$  est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par)  $\alpha := \text{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b.$$

Il en résulte que l'application qui à une série  $\sum a(n)$  associe sa somme de Ramanujan est  $\mathbf{C}$ -linéaire.

##### 4.2. TRANSLATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors pour tout entier  $N > 1$  la translatée  $E^N(a)$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a la

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier  $N > 1$ ,*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt.$$

*Démonstration.* En sommant pour  $n = 1, \dots, N-1$  l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n),$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N).$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer  $R_a(N)$  par  $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt$ .  $\square$

EXEMPLE 9. Pour  $N \geq 2$ , on a :

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}.$$

### 4.3. DÉRIVATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors sa dérivée  $\partial a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ . De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1),$$

où le terme  $a(1)$  provient du fait que  $\int_1^2 \partial(R_a)(t) dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$ . Plus généralement, on montre par récurrence sur  $n$  que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1}a(1).$$

### 4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors le produit  $ab$  est analytique de type exponentiel  $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$  dans le demi-plan  $P$ . Soient alors  $u$  et  $v$  deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement  $\alpha_u < \pi$  et  $\alpha_v < \pi$  dans le demi-plan  $P$  avec  $\alpha_u + \alpha_v < \pi$ . D'après