4.2. Translation

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\,dx$ vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction R_a. De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t)\,dt = \int_1^{\infty} a(t)\,dt\,. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$ avec $y > 0$, il vient la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y}\int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt\,.$$

4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

4.1. LINÉARITÉ

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ respectivement dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors pour tout λ, μ dans $\mathbf{C}$, $\lambda a + \mu b$ est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par) $\alpha := \mathrm{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$ dans le demi-plan P et on a :

$$R_{\lambda a+\mu b} = \lambda R_a + \mu R_b\,.$$

Il en résulte que l'application qui à une série $\sum a(n)$ associe sa somme de Ramanujan est $\mathbf{C}$-linéaire.

4.2. TRANSLATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors pour tout entier $N > 1$ la translatée $E^N(a)$ est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P et on a la

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier $N > 1$,*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. En sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$ l'équation:

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n)\,,$$

il vient:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N)\,.$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer $R_a(N)$ par $\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt$. □

EXEMPLE 9. Pour $N \geq 2$, on a:

$$\gamma = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}\,.$$

4.3. DÉRIVATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors sa dérivée ∂a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P. De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation:

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1)\,,$$

où le terme $a(1)$ provient du fait que $\int_1^2 \partial(R_a)(t)\,dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$. Plus généralement, on montre par récurrence sur n que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1} a(1)\,.$$

4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors le produit ab est analytique de type exponentiel $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$ dans le demi-plan P. Soient alors u et v deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_u < \pi$ et $\alpha_v < \pi$ dans le demi-plan P avec $\alpha_u + \alpha_v < \pi$. D'après