

## 4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction  $x \mapsto xe^{-zx}$  :

$$xe^{-zx} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

#### 4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $a(z, x)$  analytique dans  $D \times P$ . On suppose que pour tout compact  $K \subset D$ , il existe des constantes  $C_K$  et  $\tau_K < \pi$  telles que pour tout  $x \in P$  avec  $|x| > 1$  et tout  $z \in K$  on ait  $|a(z, x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$ . Alors  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z, n)$  est analytique dans  $D$ . De plus, on a :

$$\partial_z \left( \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z, n) \right) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z, n).$$

*Démonstration.* On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de  $a$  tel que pour tout  $z \in K \subset D$  (où  $K$  est un compact quelconque), on ait  $|\mathcal{B}(a)(z, x)| \leq C e^{k|z|}$  avec  $0 < k < 1$ . Soit  $R_a(z, 1) = \int_{\gamma} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$ . Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre  $z$ , la fonction à intégrer étant majorée uniformément en  $z \in K$  par une fonction intégrable.  $\square$

COROLLAIRE 4.1. La fonction  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$  est une fonction entière. Pour tout  $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} &= \zeta(z) - \frac{1}{z-1}, \\ - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} &= \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le fait que  $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$  est analytique dans  $\mathbf{C}$  est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant

vérifiée pour  $\Re(z) > 1$ , par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout  $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ . La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à  $z$ .  $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour  $z = 1$  en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}.$$

### 5. EXEMPLES D'UTILISATION

#### 5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION $\psi$

La fonction  $\psi$  vérifie l'équation :

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. § 3.1), on a pour  $\Re(z) > -1$  :

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}.$$

Supposons  $|z| < 1$  et posons  $f(x) = \frac{x}{1+xz}$ , on a

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction  $f$  :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k,$$

de rayon de convergence  $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$ , permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k \geq 1} (-1)^k z^k \left( \zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

On en déduit le développement de  $\psi$  :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k) z^{k-1}.$$