5.3. Une solution de l'équation de la chaleur

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

ce qui se traduit par les deux systèmes infinis d'équations :

$$\sum_{k\geq 1} \zeta(2k)\langle x^{2k-1}, B_{2q+1}\rangle = r_q + \frac{(-1)^q}{2}(2q+1)\frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q+1),$$

$$\sum_{k\geq 1} \zeta(2k+1)\langle x^{2k}, B_{2q+1}\rangle = -r_q,$$

avec $r_q = \left\langle \frac{1}{2x}, B_{2q+1}\right\rangle$.

5.3. Une solution de l'équation de la chaleur

En dérivant sous le signe $\sum^{\mathcal{R}}$, on vérifie aisément que la fonction

$$u(t,x,y) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4(n+t)}}$$

est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u.$$

D'après le noyau de l'équation de la chaleur, on en déduit que

$$u(1,0,0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}}^{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} u(0,x,y)\,dxdy,$$

c'est-à-dire, après passage en coordonnées polaires :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}}\,du.$$

Or, d'après l'exemple 13 (cf. §4.6), on sait que :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)\frac{u^k}{k!},$$

et d'autre part :

$$\gamma = 1 - \ln(2) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'identité :

$$\ln(2) - 1 = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)\frac{u^k}{k!}\,du,$$

qui traduit le fait que la série $\sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)$ est Borel-sommable et que

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{B}}(-1)^k\left(\zeta(k+1)-\frac{1}{k}\right)=\ln(2)-1\,,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n)=a_n$ pour tout $n\geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton*:

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,.$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n-ièmes:

$$\Delta^n a(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,C_n^k\,a_{k+1}\,.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,,$$

on déduit formellement l'égalité:

$$\sum_{k\geq 1}a(k)=a(1)\sum_{k\geq 1}1+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}\sum_{k\geq 1}(k-1)(k-2)\ldots(k-n)\,.$$

Calculons à présent $\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}}(k-1)(k-2)\ldots(k-n)$. De l'équation aux différences:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n-1)-x(x-1)\ldots(x-n)=-(n+1)(x-1)\ldots(x-n)\,,$$

il découle que:

$$R_{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}=-\frac{1}{n+1}(x-1)(x-2)\ldots(x-n-1)+I_{n+1}/(n+1)\,,$$

avec:

$$I_{n+1}=\int_0^1 x(x-1)\ldots(x-n)dx\,.$$

On a donc: