

5.3. Une solution de l'équation de la chaleur

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ce qui se traduit par les deux systèmes infinis d'équations :

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2k) \langle x^{2k-1}, B_{2q+1} \rangle = r_q + \frac{(-1)^q}{2} (2q+1) \frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1),$$

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2k+1) \langle x^{2k}, B_{2q+1} \rangle = -r_q,$$

avec $r_q = \langle \frac{1}{2x}, B_{2q+1} \rangle$.

5.3. UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

En dérivant sous le signe $\sum^{\mathcal{R}}$, on vérifie aisément que la fonction

$$u(t, x, y) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4(n+t)}}$$

est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u.$$

D'après le noyau de l'équation de la chaleur, on en déduit que

$$u(1, 0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} u(0, x, y) dx dy,$$

c'est-à-dire, après passage en coordonnées polaires :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} du.$$

Or, d'après l'exemple 13 (cf. §4.6), on sait que :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) \frac{u^k}{k!},$$

et d'autre part :

$$\gamma = 1 - \ln(2) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'identité :

$$\ln(2) - 1 = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) \frac{u^k}{k!} du,$$

qui traduit le fait que la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right)$ est Borel-sommable et que

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) = \ln(2) - 1,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. INTERPOLATION DE NEWTON ET SOMMATION DE RAMANUJAN

Étant donnée une suite $(a_n)_{n \geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n) = a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton* :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n -ièmes :

$$\Delta^n a(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k a_{k+1}.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

on déduit formellement l'égalité :

$$\sum_{k \geq 1} a(k) = a(1) \sum_{k \geq 1} 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \sum_{k \geq 1} (k-1)(k-2)\dots(k-n).$$

Calculons à présent $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n)$. De l'équation aux différences :

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1) - x(x-1)\dots(x-n) = -(n+1)(x-1)\dots(x-n),$$

il découle que :

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = -\frac{1}{n+1} (x-1)(x-2)\dots(x-n-1) + I_{n+1}/(n+1),$$

avec :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-n)dx.$$

On a donc :